Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Univ. Siegen

Übungen (3)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2013

Abgabetermin theor. Übungen: Dienstag, 30.04.13, 12 Uhr

Abgabetermin prakt. Aufgabe: Mittwoch, 08.05.13, 10 Uhr

8. **(Gronwall-Lemma)**

Seien y und v Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (1 + |y|)^{-1} \text{ auf } [0, T]$$

mit den Anfangswerten $y(0) = y_0$ beziehungsweise $v(0) = v_0$.
Weisen Sie Folgendes nach:

$$|y(t) - v(t)| \leq e^t |y_0 - v_0| \quad \text{für } t \in [0, T] \,.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion $f(t, y) = (1 + |y|)^{-1}$ einer Lipschitz-Bedingung $|f(t, y) - f(t, z)| \leq |y - z|$ genügt. Benutzen Sie dann das *Gronwallsche Lemma*:
Die stückweise stetige Funktion $w(t) \geq 0$ genüge mit zwei Konstanten $a, b \geq 0$ der Integralungleichung

$$w(t) \leq a \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds + b, \quad t \geq t_0 \,.$$

Dann gilt die Abschätzung

$$w(t) \leq e^{a(t-t_0)} b, \quad t \geq t_0 \,.$$

9. **(RK-Verfahren vom Gauß-Typ)**

Überprüfen Sie, ob das 3-stufige implizite RK-Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc}
\frac{5-\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{10-3\sqrt{15}}{45} & \frac{25-6\sqrt{15}}{180} \\
\frac{1}{2} & \frac{10+3\sqrt{15}}{72} & \frac{2}{9} & \frac{10-3\sqrt{15}}{72} \\
\frac{5+\sqrt{15}}{10} & \frac{25+6\sqrt{15}}{180} & \frac{10+3\sqrt{15}}{45} & \frac{5}{36} \\
\hline
 & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18}
\end{array}$$

maximale Konsistenzordnung $p = 6$ hat, indem Sie die Bedingungen (vgl. [Rei], (2.25), (2.27))

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \beta_{jk} \alpha_k^\ell &= \frac{\alpha_j^{\ell+1}}{\ell + 1} \,, \ \ell = 0, \ldots, r - 1, \ j = 1, \ldots, m \,, \\
\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \alpha_k^\ell &= \frac{1}{\ell + 1} \,, \ \ell = 0, \ldots, p - 1 \,,
\end{aligned}$$

für $r = m(= 3)$ nachprüfen.

- bitte wenden -

10. **(Praktische Aufgabe)**

Berechnen Sie Näherungslösungen für die Kippschwingung mit $\varepsilon = 0.1$, (s. [Rei], Beispiel 2.3 und 2.5) mit Anfangsbedingungen $u(0) = 0, u'(0) = 1$ mit den folgenden expliziten Verfahren:

(Gruppe A) Verbessertes Polygonzug-Verfahren ($m = 2$);
(Gruppe B) Verbessertes Verfahren von Euler-Cauchy ($m = 2$);
(Gruppe C) Optimales Verfahren ($m = 2$), (vgl. [Rei], Beispiel. 2.19c);
(Gruppe D) Einfache Runge–Kutta-Regel ($m = 3$), (s. [Rei], Bspl. 2.22 u. Aufg. 9).

Rechnen Sie als Vergleich auch (alle Teiln.) das klassische Runge–Kutta-Verfahren ($m = 4$) (mit numer. Lösung (y_h^1, y_h^2)) und vergleichen Sie die Differenz der numerischen Lösungen der beiden Verfahren; rechnen Sie mit Schrittweiten $h = 10^{-2}, 5 * 10^{-3}$. Rechnen Sie bis $T = 130$.

Tragen Sie dann in einer Grafik die zwei Lösungskurven für die Lösung u_h^1 des von Ihnen gerechneten Verfahrens sowie die Lösung y_h^1 des klass. Runge–Kutta-Verfahrens auf. Drucken Sie (Bezeichnungen wie in [Rei], Beispiel 2.5 und Aufg. C.1)

$$t, u_h^1(t),\, y_h^1(t),\, u_h^1(t) - y_h^1(t),\, u_h^2(t),\, u_h^2(t) - y_h^2(t)$$

in Schritten von 5.0.

Hinweise: Gruppenabgabe ist <u>nicht</u> möglich; Zusammenarbeit ist durchaus erwünscht.

Gruppe	Matrikel Nr.
A	9xx134, 9xx411
B	9xx917, 9xx646
C	9xx990
D	9xx638, 7xx084

Schicken Sie bis zum angegebenen Termin Ihre Lösung als Matlab- bzw. Octave-File an: Stefan.Schuss@gmx.de