Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (4)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2013
(Abgabetermin: Mittwoch, 15.05.13, 10 Uhr)

11. **(SDIRK-Verfahren)**

Geben Sie für das folgende SDIRK-Verfahren (engl.: 'Singly Diagonal Implicit Runge-Kutta-Method') der Stufe $m = 2$ mögliche γ's an, so dass das Verfahren Konsistenzordnung $p = 3$ hat:

$$\begin{array}{r|rr} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Hinweis: Prüfen Sie die Bedingungen aus [Rei], (2.25), (2.27) (vgl. auch Aufg. 9) für $m = 2, p = 3$ und $r = m - 1 = 1$ nach.

12. **(Crank-Nicolson-Verfahren; 8 Punkte)**

Das einstufige implizite Gauß-Verfahren lässt sich durch das zweite Schema in [Rei], Beispiel 2.25, erklären,

$$u_h(t+h) = u_h(t) + hk_1, \quad k_1 = f\left(t + \frac{h}{2}, u_h(t) + \frac{h}{2}k_1\right), t \in I'_h.$$

Zeigen Sie:

(a) Dieses Verfahren lässt sich auch in zwei Halbschritten berechnen,

$$\eta_1 = u_h(t) + \frac{h}{2} f\left(t + \frac{h}{2}, \eta_1\right),$$
$$u_h(t+h) = \eta_1 + \frac{h}{2} f\left(t + \frac{h}{2}, \eta_1\right).$$

D. h. im ersten Schritt berechnet man η_1 implizit (analog dem impliziten Euler-Verfahren mit halber Schrittweite $h/2$) und dann in einem zweiten Halbschritt $u_h(t+h)$ mit dem expliziten Euler-Verfahren.

(b) Das obige Verfahren hat Konsistenzordnung $p = 2$. Welche Glattheit muss man von der Lösung des AWP voraussetzen? Zeigen Sie die behauptete Konsistenzordnung direkt, d.h. ohne Benutzung der Bedingungen (2.25), (2.27) aus [Rei], 2.5.

Bem.: Dieses Verfahren heißt auch *Crank-Nicolson-Verfahren.*