Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (5)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2013
(Abgabetermin: Mittwoch, 22.05.13, 10 Uhr)

13. **(Stabilitätsfunktion A-Stabilität; 2 + 4 Punkte)**
    Zeigen Sie, dass
    a)
    $$R_0(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$
    die Stabilitätsfunktion des Crank-Nicolson-Verfahrens (s. Aufg. 12)
    $$u_h(t+h) = u_h(t) + h\, f\left(t + \frac{h}{2},\, \frac{1}{2}\big(u_h(t) + u_h(t+h)\big)\right)$$
    ist, und dass
    b) dieses Verfahren A-stabil ist.

14. **(Stabilität von Einschrittverfahren; 6 Punkte)**
    Jede der in der Vorlesung betrachteten Einschrittmethoden nimmt angewendet auf ein lineares (autonomes) System $u'(t) = Au(t)$ die Form $y_k = g(hA)y_{k-1}$ an, mit einer rationalen Funktion $g(\cdot)$.
    a) Für den Fall, dass die Matrix A symmetrisch ist, zeigen Sie bzgl. der euklidischen Norm die Abschätzung
    $$\|y_k\| \le \max_{1\le i\le n} \left|g(h\lambda_i)\right|^k \|y_0\|$$
    mit den Eigenwerten λ_i von A. (*Hinweis:* Symmetrische Matrizen besitzen ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren.)
    b) Bestimmen Sie die maximale Schrittweite h, für die das „klassische“ 4-stufige Runge–Kutta-Verfahren das System
    $$u'(t) = -10u(t) + 9v(t), \quad v'(t) = 9u(t) - 10v(t)$$
    noch numerisch stabil integriert, d.h. es muss gelten $h\lambda_i \in \mathcal{I}_{RK},\ i = 1, 2$, mit den Eigenwerten $\lambda_i = \lambda_i(A)$ des angegebenen Systems und dem Stabilitätsintervall $\mathcal{I}_{RK} = [-2.78, 0]$ des klassischen Runge–Kutta-Verfahrens.

Hinweise: $g = R_0 =$ Stabilitätsfunktion, $y_k = u_h(t_k),\ y_0 = \alpha_h$ in [Rei].
Beweisen Sie die Aussage in a) nur für den Fall, dass g ein Polynom ist, $g(z) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j z_j$. Z.B. ist
$$g(z) = 1 + z \text{ für das explizite Euler-Verfahren}\,,$$
$$g(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \text{ für das klass. Runge–Kutta-Verfahren.}$$