

Theoretische Übungen (6)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2013
(Abgabetermin: Mittwoch, 29.05.13, 10 Uhr)

15. (Stabilität von Differentialgleichungen)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) = -u(t), \quad t > 0.$$

- a) Schreiben Sie die Differentialgleichung um als ein System 1. Ordnung, $\underline{v}' = A\underline{v}$, und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A .
- b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.
- c) Entscheiden Sie, ob das zugehörige AWP (mit $t_0 = 0$) stabil ist.

Hinweise:

- zu b) Schauen Sie entweder in den Anhang A.3 oder finden Sie ein Fundamentalsystem einfach durch Hinschauen.
- zu c) Sie können entweder Satz 2.41 benutzen oder Bedingung (2.45) aus [Rei] elementar überprüfen.

16. (Lösung impliziter Gleichungen)

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = -20u'(t) - 19u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -10,$$

soll das Adams–Moulton-Verfahren mit Schrittzahl $s = 2$

$$u_j = u_{j-1} + \frac{1}{12} h(5f_j + 8f_{j-1} - f_{j-2})$$

verwendet werden. Dazu formen Sie die Differentialgleichung zunächst in ein System erster Ordnung um. Wie klein muss dann die Schrittweite h bemessen sein, damit in jedem Zeitschritt die Konvergenz der Fixpunktiteration zur Berechnung von u_j garantiert ist?

17. (Lösung von Differenzgleichungen für Mehrschrittverfahren)

Betrachten Sie das Milne-Verfahren (mit $s = 3$):

$$u_{j+2} - u_j = \frac{h}{3} (f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j), \quad j = 0, \dots, N_h - 2.$$

Geben Sie die Lösung des Verfahrens für die Testgleichung $u' = \lambda u$, $u(0) = 1$ an; verwenden Sie die Startwerte $u_0 = 1$, $u_1 = e^{\lambda h}$ mit Schrittweite $h > 0$ und $\lambda = -1$.

Hinweise: Verwenden Sie für die Lösung des Ansatz

$$u_j = \alpha \lambda_1^j + \beta \lambda_2^j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

mit $\lambda_{1,2} = \frac{-2h \pm \sqrt{9 + 3h^2}}{3 + h}$.

Zeigen Sie damit, dass die Verfahrensgleichung erfüllt ist. Hierzu können Sie den Satz von Vieta oder elementare Überlegungen nutzen, um die quadratische Gleichung zu bestimmen, für die λ_1, λ_2 Nullstellen sind. Bestimmen Sie dann α und β aus den Startwerten $u_0 = 1$, $u_1 = e^{-h}$.