

**Übungen (8)**  
**zur Vorlesung „Numerik II“**  
**im Sommersemester 2013**  
**Abgabetermin: Mittwoch, 19.06.13, 10 Uhr**

**21. (Konsistenz und Stabilität von Mehrschrittverfahren)**

Berechnen Sie die Konsistenzordnung des folgenden expliziten linearen Mehrschrittverfahrens,

$$u_{j+2} + 4u_{j+1} - 5u_j = 2h(2f_{j+1} + f_j),$$

wobei  $u_j = u_h(t_j)$ ,  $f_j = f(t_j, u_j)$ . Ist es nullstabil?

*Hinweis:* Die Konsistenzordnung können Sie mit Hilfe der Bedingung (a) aus [Rei], Satz 3.11, bestimmen:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^s a_k = 0 \text{ und } \sum_{k=0}^s (k^\ell a_k - \ell k^{\ell-1} b_k) = 0 \text{ für } \ell = 1, \dots, p.$$

**22. (Stabilitätsgebiet linearer Mehrschrittverfahren)**

Zeigen Sie: Für das Stabilitätsgebiet  $S$  des folgenden Mehrschrittverfahrens (mit Schrittzahl  $s = 2$ )

$$u_{j+2} - 4u_{j+1} + 3u_j = -2hf_j$$

gilt

$$S \cap (-\infty, 0) = \emptyset.$$

(D.h. für  $\mu < 0$  erfüllen die Nullstellen des „Stabilitätspolynoms“  $\varphi_\mu(z) = \rho(z) - \mu\sigma(z)$  nicht die Wurzelbedingung.)

*Hinweis:*

- i) Stellen Sie das Stabilitätspolynom des Verfahrens auf;
- ii) Bestimmen Sie die Nullstellen für  $\mu < 0$  und zeigen Sie, dass für mindestens eine Nullstelle  $z_j$  gilt:  $|z_j| > 1$ .

23. (Schießverfahren; 6 Punkte, Bonusaufgabe)

Die Randwertaufgabe

$$u''(x) = 100u(x), \quad 0 \leq x \leq 3, \quad u(0) = 1, \quad u(3) = e^{-30}, \quad (*)$$

soll mit dem einfachen Schießverfahren gelöst werden. Dazu bestimmen Sie die Lösung  $u$  von  $(*)$  und berechnen Sie die Lösung  $y(x; s)$  der Anfangswertaufgabe

$$y''(x) = 100y(x), \quad x \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = s,$$

und bestimmen Sie  $s = s^*$  so, dass  $y(3; s^*) = e^{-30}$  wird. Wie groß ist der relative Fehler in  $y(3; s^*)$ , wenn  $s^*$  mit einem relativen Fehler  $\varepsilon$  behaftet ist?

*Hinweis:* Benutzen Sie das Fundamentalsystem  $\{e^{10x}, e^{-10x}\}$  von  $(*)$ .