Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungen (9)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2013

Abgabetermin für theor. Übungen: Mittwoch, 26.06.13, 10 Uhr
Abgabetermin für prakt. Übung: Mittwoch, 03.07.13, 10 Uhr)

24. **(Differenzenverfahren für Randwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen)**

Das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x),\; x \in [a,b]\,,\; a < b\,,$$

mit gemischten Randbedingungen

$$-u'(a) = \eta_0,\; u(b) + u'(b) = \eta_1$$

werde auf einem Gitter $I_h = \{x = a + jh,\; j = 0, \ldots, N_h\}$, $N_h = (b-a)/h$, durch den zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung in der Differentialgleichung und durch den vorwärtsgenommenen bzw. rückwärtsgenommen Differenzenquotienten 1. Ordnung in den Randbedingungen bei $x = a$ bzw. $x = b$ approximiert.

a) Prüfen Sie die Lösbarkeit des RWP.
b) Stellen Sie das zugehörige $(N_h + 1) \times (N_h + 1)$ - Gleichungssystem auf.
c) Prüfen Sie das schwache Zeilensummenkriterium nach (mit Begründung und Angabe des schwachen Zeilensummenkriteriums).
d) Falls das schwache Zeilensummenkriterium nicht erfüllt ist, prüfen Sie nach, ob das Gleichungssystem z.B. im Fall $N_h = 3$ doch lösbar ist.

25. **(Ein nullstabiles 4-Schrittverfahren mit Konsistenzordnung 6)**

Durch

$$\rho(z) = (z^2 - 1)(z^2 + 2\mu z + 1),\; |\mu| < 1$$
$$\sigma(z) = \frac{1}{45}(14 - \mu)(z^4 + 1) + \frac{1}{45}\,(64 + 34\mu)z(z^2 + 1) + \frac{1}{15}(8 + 38\mu)z^2$$

ist ein 4-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 6$ gegeben. Zeigen Sie die Nullstabilität des Verfahrens.

26. **(Gleichgradig stetige Funktionen)**

Sei $[a,b]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden. Bekanntlich ist eine Folge $u_k \in C^1[a,b]\,,\; k \in \mathbb{N}$, gleichgradig stetig, falls die Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind. Zeigen Sie, dass die Folge (u_k) auch gleichgradig stetig ist, falls nur gilt

$$|u_k|_{1,2} := \left(\int_a^b |u_k'(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \le C\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

- bitte wenden -

27. **(Gleichmäßig gleichgradig stetige Funktionen)**

Sei $[a,b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden. Für jedes $h>0$ sei das Punktegitter

$$[a,b]_h = \{x \in [a,b] \mid x = a + jh,\ j = 0,\dots,N_h\}$$

sowie

$$[a,b]_h^0 = \{x \in [a,b] \mid x = a + jh,\ j = 0,\dots,N_h - 1\},\ N_h h = b - a\,,$$

erklärt. Sei Λ eine Nullfolge von Schrittweiten h, und sei $(u_h)_{h\in\Lambda}$ eine Folge von Funktionen $u_h \in C[a,b]_h,\ h \in \Lambda$. Dann heißt diese Folge *gleichmäßig gleichgradig stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $h \in \Lambda$ mit $0 < h < \delta$ und jedes $x, x' \in [a,b]_h$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|u_h(x) - u_h(x')| < \varepsilon$.

Beweisen Sie:

Die Folge $(u_h)_{h\in\Lambda}$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig, wenn mit einer Zahl $\gamma > 0$ die Abschätzung gilt

$$\|D_h^+ u_h\|_{0,\infty} \le \gamma,\ h \in \Lambda,$$

mit dem vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten D_h^+ und der Abkürzung

$$\|D_h^+ u_h\|_{0,\infty} := \max_{x\in[a,b]_h^0} |D_h^+ u_h(x)|.$$

28. **(Praktische Aufgabe)** Mit den angegebenen Verfahren (1) - (3) sollen Aufgaben aus A) - C) gerechnet werden. Die Aufgaben in C) beinhalten jeweils 2 verschiedene Parameter ε.

Für die verschiedenen Teilnehmer sind die folgenden Aufgaben zu lösen:

Gruppe D:

A2 mit (1), B2 mit (3), C1 mit (3)

Gruppe C:

A1 mit (3), B1 mit (1), C2 mit (1)

Gruppe B:

C1 mit (1), C2 mit (3)

Gruppe A:

C3 mit (1) und (2) .

Zum Vergleich drucken Sie auch den Fehler zur exakten Lösung des Randwertproblems bzw. zu einer (analytischen) Näherungslösung. Erstellen Sie also insgesamt 4 Tabellen der Form

$$x \quad u_h(x) \quad u_h(x) - u(x) \quad \log_{10}|u_h(x) - u(x)|\,.$$

Als Maschenweite verwenden Sie in A), B) und C2), C3) $h = (b-a)/40$ sowie in C1) (für $\varepsilon = 10^{-2}$) $h = (b-a)/500$, drucken Sie die Ergebnisse aber nur in Schritten von $(b-a)/20$. Andere Maschenweiten sind bei unbefriedigenden Ergebnissen auch wählbar.

Im Fall von inhomogenen Dirichlet–Randbedingungen verwenden Sie auch für das Ritzsche Verfahren einfach die vorgegebenen Randwerte. Für die Berechnung der rechten Seite beim Ritz–Verfahren wurde die Simpson–Formel zugrunde gelegt.

Aufgaben

A) **lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

1) $-u'' + u = 1$ in $0 < x < 1$, $u(0) = u(1) = 0$

2) $-u'' = \pi^2 \sin(\pi x)$ in $0 < x < 1$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

(Exakte Lösungen: zu 1) $u(x) = \frac{1-e^{-1}}{e^{-1}-e} e^x + \frac{e-1}{e^{-1}-e} e^{-x} + 1$

zu 2) $u(x) = \sin(\pi x) + x$)

B) **lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten**

1) $-u'' + xu = 1$ in $0 < x < 1$, $u(0) = u(1) = 0$

(Näherungslösung $u(x) \approx cx - \frac{1}{2}x^2 + \frac{c}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5$, $c = \frac{63}{130}$)

2) „Biegung eines Stabes“

$u'' + (1 + x^2)u = -1$ in $-1 < x < 1$, $u(-1) = u(1) = 0$

(Näherungslösung mit der Methode der sukzessiven Approximation $u \approx v$, wobei (vgl. Collatz [14][1], S. 195)

$v(x) = \frac{1}{32}\left\{\frac{75\,379}{2520} - 31x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{31}{30}x^6 - \frac{1}{56}x^8 - \frac{1}{90}x^{10}\right\}$.)

C) **lineare Grenzschichtprobleme**

1) $u'' + 100u = 0$ in $0 < x < 2\pi + \varepsilon$,
$u(0) = u(2\pi + \varepsilon) = 1$
mit $\varepsilon = 1,\ 10^{-2}$ (Lösung: $u(x) = \cos(10x) + \frac{1-\cos(10(2\pi+\varepsilon))}{\sin(10(2\pi+\varepsilon))} \cdot \sin(10x)$)

2) $u'' + (1 + \varepsilon x^2)u = -1$ in $-1 < x < 1$, $u(-1) = u(1) = 0$
für $\varepsilon = 0.5 * 10^{-1},\ 0.5 * 10^{-2}$
(Näherungslösung $u \approx u_0 + \varepsilon u_1$, wobei

$$u_0(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(1)} - 1 ,$$

$$u_1(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{12\cos(1)}\left[(3x - 2x^3)\sin(x) - 3x^2\cos(x) + A\cos(x)\right]$$

und $A = \dfrac{1}{12\cos^2(1)}\,[15\cos(1) - \sin(1)]$.)

3) $\varepsilon u'' + u' = 0$ in $0 < x < 1$,
$u(0) = 1$, $u(1) = 0$
mit $\varepsilon = 0.5 * 10^{-2},\ 0.5 * 10^{-3}$ (Lösung: $u(x) = \frac{e^{-1/\varepsilon} - e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1/\varepsilon} - 1}$)

Verfahren (für $u'' + pu' + qu = f$ in $[a, b]$, $u(a) = \gamma_0$, $u(b) = \gamma_1$)

Zentrale Differenzenquotienten

$$\left(1 - \frac{h}{2}p_j\right)u_{j-1} - (2 - h^2 q_j)u_j + \left(1 + \frac{h}{2}p_j\right)u_{j+1} = h^2 f_j\ , \qquad j = 1, \ldots, N-1\ , \tag{1}$$

wobei $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $f_j = f(x_j)$;

Upwind Schema

$$(1 - hp_j^-)u_{j-1} - (2 - h^2 q_j + h|p_j|)u_j + (1 + hp_j^+)u_{j+1} = h^2 f_j\ , \qquad j = 1, \ldots, N-1\ , \tag{2}$$

wobei $p_j^- = \min(0, p_j)$, $p_j^+ = \max(0, p_j)$;

[1] Angaben aus Buch [Rei]

Ritz–Verfahren (für $u'' + qu = f$ in $[a,b]$, $u(a) = \gamma_0$, $u(b) = \gamma_1$)

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{h^2}{6} q_{j-1/2}\right) v_{j-1} - \left(2 - \frac{h^2}{6}\left(q_{j-1/2} + 2q_j + q_{j+1/2}\right)\right) v_j \\
&\quad + \left(1 + \frac{h^2}{6} q_{j+1/2}\right) v_{j+1} \;=\; \frac{h^2}{3}\left(f_{j-1/2} + f_j + f_{j+1/2}\right) \;, \\
&\qquad\qquad j = 1, \ldots, N-1 \;,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

wobei $q_{j\pm1/2} = q(x_{j\pm1/2})$, $x_{j\pm1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j\pm1})$; analog für f.