Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (1)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015

(Abgabetermin: Dienstag, 14.04.15, 10 Uhr)

1. **(Stationäre Punkte)**

   Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\cos(x)\sin(x)}$. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

2. **(Taylorsche Reihenentwicklung)**

   Entwickeln Sie die Funktionen

   $$\sin(x),\ e^x\ ,\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

   als Taylorreihen um die Stelle $x_0 = 0$.
   Hinweis: Eine Untersuchung des Konvergenzradius der gegebenen Funktionen ist hier nicht nötig.

3. **(Taylorpolynom)**

   Entwickeln Sie auch die Funktion

   $$f(x) = \lambda(x^2 - F^2)^2$$

   um ein Minimum bis zur 4. Ordnung (λ und F sind reelle Zahlen).

4. **(Temperaturverteilung; 6 Punkte)**

   Das Newtonsche Abkühl-Gesetz besagt, dass die Abkühlrate $T'(t)$ eines gut wärmeleitenden Körpers zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ proportional ist zur Differenz zwischen seiner Temperatur $T(t)$ und der Umgebungstemperatur T_a. Das heißt, es gilt

   $$T'(t) = k\big(T(t) - T_a\big), \qquad t \in \mathbb{R}$$

   mit einer Konstanten $k < 0$.

   a) Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

   $$T'(t) = k(T(t) - T_a)\,.$$

   b) Wie lange dauert es, bis ein (zum Zeitpunkt $t = 0$) $100°$ heißer Körper bei einer Außentemperatur von $T_a = 20°$ auf $30°$ abgekühlt ist, wenn $T(20) = 60°$ gilt?

   c) Bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} T(t)$.

   Hinweis: Verwenden Sie für a) die Methode der Variation der Konstanten. Beachten Sie, dass aus physikalischen Gründen die Körpertemperatur immer größer gleich der Außentemperatur bleibt. Bestimmen Sie die Konstante k aus den Bedingungen in b).