

Übungen (10)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015
(Abgabetermin: Dienstag, 23.06.15, 10:00 Uhr)

26. (Schießverfahren; 6 Punkte, Bonusaufgabe)

Die Randwertaufgabe

$$u''(x) = 100u(x), \quad 0 \leq x \leq 3, \quad u(0) = 1, \quad u(3) = e^{-30}, \quad (*)$$

soll mit dem einfachen Schießverfahren gelöst werden.

- a) Bestimmen Sie die Lösung von (*).
- b) Berechnen Sie dann die Lösung $y(x; s)$ der Anfangswertaufgabe

$$y''(x) = 100y(x), \quad x \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = s,$$

und bestimmen Sie $s = s^*$ so, dass $y(3; s^*) = e^{-30}$ wird.

- c) Wie groß ist der relative Fehler in $y(3; s^*)$, wenn s^* mit einem relativen Fehler ε behaftet ist?

Hinweis: Benutzen Sie ein Fundamentalsystem von (*).

27. (Differenzenverfahren für Randwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen)

Das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad a < b,$$

mit gemischten Randbedingungen

$$-u'(a) = \eta_0, \quad u(b) + u'(b) = \eta_1$$

werde auf einem Gitter $I_h = \{x = a + jh, j = 0, \dots, N_h\}$, $N_h = (b - a)/h$, durch den zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung in der Differentialgleichung und durch den vorwärtsgenommenen bzw. rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten 1. Ordnung in den Randbedingungen bei $x = a$ bzw. $x = b$ approximiert.

- a) Prüfen Sie die Lösbarkeit des RWP.
- b) Stellen Sie das zugehörige $(N_h + 1) \times (N_h + 1)$ - Gleichungssystem auf.
- c) Prüfen Sie das schwache Zeilensummenkriterium nach (mit Begründung und Angabe des schwachen Zeilensummenkriteriums).
- d) Falls das schwache Zeilensummenkriterium nicht erfüllt ist, prüfen Sie nach, ob das Gleichungssystem z.B. im Fall $N_h = 3$ evtl. doch lösbar ist.

28. (Differenzenapproximation für Besselsche Differentialgleichung)

Die *Besselsche Differentialgleichung* der Ordnung $\nu > 0$,

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0, \quad x \in (0, 2),$$

besitzt genau eine Lösung $u \in C^2[0, 2]$ mit Randwerten $u(0) = 0, u(2) = 1$. Mit dem Ansatz $u(x) = x^\nu \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, a_0 \neq 0$, lässt sich diese beschränkte Lösung darstellen. (Darüber hinaus existieren noch weitere Lösungen, die im Nullpunkt jedoch unbeschränkt sind.)

Diskretisieren Sie das Randwertproblem mit zentralen Differenzenquotienten auf einem äquidistanten Gitter und stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf. Verwenden Sie die angegebenen Randbedingungen. Zur Lösbarkeit prüfen Sie die Eigenschaft „positiver Typ“ nach (vgl. z.B. [Rei12], 5.3).

Literatur

- [Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme*. (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.