Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungen (11)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015

(Abgabetermin theor. Übung: Dienstag, 30.06.15, 10:00 Uhr)
(Abgabetermin prakt. Übungen: Dienstag, 07.07.15, 9:00 Uhr)[1]

29. **(Inverse Monotonie und positiver Typ)**

Sei A eine $(N+1)\times(N+1)$-tridiagonale Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & & 0 \\ b_1 & a_1 & c_1 & & & \\ 0 & b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

$-A$ ist invers monoton, wenn die folgende „positiver Typ“ -Eigenschaft gilt:

$$b_j > 0,\ c_j > 0,\ \text{und}\ a_j + b_j + c_j \le 0,\ j = 1, \dots, N-1\,.$$

Hinweise:

a) Eine Matrix B heißt *invers monoton* (vgl. z. B. [KB13]), wenn die folgende Implikation gilt ($\le$ ist komponentenweise gemeint)

$$Bx \le 0 \implies x \le 0$$

b) Sie können benutzen, dass für Matrizen A mit der Eigenschaft „positiver Typ“ das diskrete Maximumprinzip gilt (vgl. z. B. [Rei12], 5.3), d.h. wenn für $v = (v_0, \dots, v_N)^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $Av \ge 0$ die Bedingung

$$v_{j_*} = \max_{j=0,\dots,N} v_j \quad \text{für einen Index}\ \ 1 \le j_* \le N-1$$

und ein nicht negatives Maximum $v_{j_*} \ge 0$ gilt, so folgt $v_0 = v_1 = \dots = v_N$.

30. **(Satz von Arzelà-Ascoli; Bonusaufgabe)**

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C([-1,1],\mathbb{R})$. Weiterhin gelte:

$$\exists\, c_1 \ge 0\ \forall\, t \in [-1,1]\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |f_n(t)| \le c_1.$$

Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$F_n(t) := \int_{-1}^{t} f_n(s)ds,\ t \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

[1] Wie immer an timo.dornhoefer@student.uni-siegen.de schicken.

Zeigen Sie, dass auch die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Arzelà-Ascoli (vgl. z. B. [Rei12]), Satz 5.6) und den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

31. **(Praktische Aufgabe)** Mit den angegebenen Verfahren (1) - (3) sollen Aufgaben aus A) - C) gerechnet werden. Die Aufgaben in C) beinhalten jeweils 2 verschiedene Parameter ε.

Für die verschiedenen Teilnehmer sind die folgenden Aufgaben zu lösen:

Endziffer Matrikel Nr.	Verfahren
0-4	(1) und (2) für Aufg. A2, B1, C2
5-9	(2) und (3) für Aufg. A1, B2, C1

Zum Vergleich drucken Sie auch den Fehler zur exakten Lösung des Randwertproblems bzw. zu einer (analytischen) Näherungslösung. Erstellen Sie also insgesamt 8 Tabellen der Form

$$x \quad u_h(x) \quad u_h(x)-u(x) \quad \log_{10}|u_h(x)-u(x)|\,.$$

Als Maschenweite verwenden Sie in A), B) und C2), C3) $h=(b-a)/40$ sowie in C1) (für $\varepsilon=10^{-2}$) $h=(b-a)/500$, drucken Sie die Ergebnisse aber nur in Schritten von $(b-a)/20$. Andere Maschenweiten sind bei unbefriedigenden Ergebnissen auch wählbar.

Im Fall von inhomogenen Dirichlet–Randbedingungen verwenden Sie auch für das Ritzsche Verfahren einfach die vorgegebenen Randwerte. Für die Berechnung der rechten Seite beim Ritz–Verfahren wurde die Simpson–Formel zugrunde gelegt.

Aufgaben

A) **lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

1) $-u''+u=1$ in $0<x<1\,,\ u(0)=u(1)=0$
2) $-u''=\pi^2\sin(\pi x)$ in $0<x<1\,,\ u(0)=0,\ u(1)=1$
   (Exakte Lösungen: zu 1) $u(x)=\frac{1-e^{-1}}{e^{-1}-e}e^x+\frac{e-1}{e^{-1}-e}e^{-x}+1$
   zu 2) $u(x)=\sin(\pi x)+x$)

B) **lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten**

1) $-u''+xu=1$ in $0<x<1\,,\ u(0)=u(1)=0$
   (Näherungslösung $u(x)\approx cx-\frac{1}{2}x^2+\frac{c}{12}x^4-\frac{1}{40}x^5\,,\ c=\frac{63}{130}$)
2) „Biegung eines Stabes“

$$u''+(1+x^2)u=-1 \text{ in } -1<x<1\,,\ u(-1)=u(1)=0$$

   (Näherungslösung mit der Methode der sukzessiven Approximation $u\approx v$, wobei (vgl. Collatz [14][2], S. 195)
   $v(x)=\frac{1}{32}\left\{\frac{75\,379}{2520}-31x^2+\frac{1}{12}x^4+\frac{31}{30}x^6-\frac{1}{56}x^8-\frac{1}{90}x^{10}\right\}$.)

C) **lineare Grenzschichtprobleme**

1) $u''+100u=0$ in $0<x<2\pi+\varepsilon$,
   $u(0)=u(2\pi+\varepsilon)=1$
   mit $\varepsilon=1,\ 10^{-2}$ (Lösung: $u(x)=\cos(10x)+\frac{1-\cos(10(2\pi+\varepsilon))}{\sin(10(2\pi+\varepsilon))}\cdot\sin(10x)$)
2) $\varepsilon u''+u'=0$ in $0<x<1$,
   $u(0)=1,\ u(1)=0$
   mit $\varepsilon=0.5*10^{-2},\ 0.5*10^{-3}$ (Lösung: $u(x)=\frac{e^{-1/\varepsilon}-e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1/\varepsilon}-1}$)

[2] Angaben aus Buch [Rei12]

Verfahren (für $u'' + pu' + qu = f$ in $[a,b]$, $u(a) = \gamma_0$, $u(b) = \gamma_1$)

Zentrale Differenzenquotienten

(1) $$\left(1 - \frac{h}{2}p_j\right) u_{j-1} - (2 - h^2 q_j) u_j + \left(1 + \frac{h}{2}p_j\right) u_{j+1} = h^2 f_j\ , \qquad j = 1, \ldots, N-1\ ,$$

wobei $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $f_j = f(x_j)$;

Upwind Schema

(2) $$(1 - hp_j^-) u_{j-1} - (2 - h^2 q_j + h|p_j|) u_j + (1 + hp_j^+) u_{j+1} = h^2 f_j\ , \qquad j = 1, \ldots, N-1\ ,$$

wobei $p_j^- = \min(0, p_j)$, $p_j^+ = \max(0, p_j)$;

Ritz–Verfahren (für $u'' + qu = f$ in $[a,b]$, $u(a) = \gamma_0$, $u(b) = \gamma_1$)

(3) $$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{h^2}{6} q_{j-1/2}\right) v_{j-1} - \left(2 - \frac{h^2}{6}\left(q_{j-1/2} + 2q_j + q_{j+1/2}\right)\right) v_j \\ &\quad + \left(1 + \frac{h^2}{6} q_{j+1/2}\right) v_{j+1} = \frac{h^2}{3}\left(f_{j-1/2} + f_j + f_{j+1/2}\right)\ , \\ &\qquad j = 1, \ldots, N-1\ , \end{aligned}$$

wobei $q_{j\pm 1/2} = q(x_{j\pm 1/2})$, $x_{j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j\pm 1})$; analog für f.

Literatur

[KB13] Knabner, P., Barth, W., *Lineare Algebra: Grundlagen und Anwendungen.* Springer, 2013

[Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme.* (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.