Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (2)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015
(Abgabetermin: Dienstag, 21.04.15, 10 Uhr)

5. **(ICE-Bremsweg)**

Es soll der Bremsweg eines Zuges, z.B. ICE, bestimmt werden, der lediglich durch seine Rollreibung und den Luftwiderstand abgebremst wird. Gegeben seien folgende physikalische Größen,

	Maßeinheit	Daten
– Masse des Zuges m	$[t]$	450
– Stirnfläche A	$[m^2]$	11
– Luftwiderstandsbeiwert c_w	[-]	0,2
– Rollreibungswert μ	[-]	0,01
– Luftdichte ρ_L	$[kg/m^3]$	1,25
– Anfangsgeschwindigkeit v_0	$[km/h]$	300
entspricht:	$[m/s]$	83,33
– Erdbeschleunigung g	$[m/s^2]$	9,81

Aus einem Kräftegleichgewicht leitet man die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die Geschwindigkeit her,

(1) $$v'(t) - \frac{c_w A \rho_L}{2m}\, v^2(t) = -\mu g\ ,\ t > 0\,.$$

Dies ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung, die man in der Form

(2) $$v'(t) = Bv^2(t) - C,\ t > 0$$

mit $B = c_w A \rho_L/(2m), C = \mu g$ schreiben kann.

Gewöhnliche Differentialgleichungen der Form (2) sind Spezialfälle sogenannter Riccatischer Differentialgleichungen. Im vorliegenden Fall kann man die Lösung explizit angeben.

Durch die Transformation,

(3) $$u(t) = e^{-B\int v(t)\,dt} = e^{-Bx(t)}$$

mit $x(t) = \int v(t)\,dt =$ zurückgelegter Weg, geht (2) über in eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(4) $$u'' - \alpha^2 u = 0 \quad \text{mit } \alpha = \sqrt{BC}\,,$$

deren allgemeine Lösung durch

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \tag{5}$$

gegeben ist. Die Koeffizienten c_1, c_2 bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.
Bestimmen Sie

- u aus den Anfangsbedingungen $x(0) = 0, v(0) = v_0$;
- x und v aus der Transformationsformel (3);
- eine Formel für den Zeitpunkt T, für den der Zug zum Stillstand kommt;
- für die obigen konkreten Daten den Zeitpunkt T und den Weg $x(T)$.

6. **(Verbessertes Verfahren von Euler–Cauchy)**

Wenden Sie für das lineare AWP (in $\mathbb{K}^1$ oder $\mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$u(t_0) = \alpha,\ u'(t) = A(t)u(t) + b(t),\ t \in I := [t_0, t_0 + T]\,,$$

das verbesserte Verfahren von Euler–Cauchy an und schreiben es in der Form

$$u_h(t_0) = \alpha_h,\ u_h(t+h) = C_h(t)u_h(t) + hd_h(t),\ t \in I'_h\,.$$

Geben Sie $C_h(t)$ und $d_h(t)$ mit Hilfe von $A(t)$ und $b(t)$ an.

7. **(Lineare Einschrittverfahren)**

Zeigen Sie (durch vollständige Induktion), dass sich die Lösung des linearen Einschrittverfahrens

$$u_{m+1} = C_m u_m + h\, d_m,\ m = 0, \ldots, N-1\,,$$

explizit darstellen läßt als

$$u_{m+1} = \prod_{\nu=0}^{m} C_\nu u_0 + h \sum_{\mu=0}^{m} \prod_{\nu=\mu+1}^{m} C_\nu d_\mu,\ m = 0, \ldots, N\,.$$

Hierbei ist $\sum\limits_{\nu=n}^{m} C_\nu = 0$ und $\prod\limits_{\nu=n}^{m} C_\nu = I$, falls $n > m$.