Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungen (3)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015

(Abgabetermin theor. Übungen: Dienstag, 28.04.15, 10 Uhr)
(Abgabetermin prakt. Übungen: Dienstag, 05.05.15, 10 Uhr)

8. **(Crank-Nicolson-Verfahren oder Implizite Mittelpunktregel)**

   Das einstufige implizite Gauss-Verfahren lässt sich durch das zweite Schema in [Rei12], Beispiel 2.25, erklären,

$$u_h(t+h) = u_h(t) + hk_1, \quad k_1 = f(t+\frac{h}{2}, u_h(t) + \frac{h}{2}k_1), \ t \in I_h' \quad (*)$$

   Zeigen Sie:

   a) Dieses Verfahren lässt sich auch in zwei Halbschritten berechnen,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= u_h(t) + \frac{h}{2} f(t+\frac{h}{2}, \eta_1), \quad (**) \\ u_h(t+h) &= \eta_1 + \frac{h}{2} f(t+\frac{h}{2}, \eta_1). \quad (***) \end{aligned}$$

   D.h. im ersten Schritt berechnet man η_1 implizit (analog dem impliziten Euler-Verfahren mit halber Schrittweite $h/2$) und dann in einem zweiten Halbschritt $u_h(t+h)$ mit dem expliziten Euler-Verfahren.

   b) Das obige Verfahren hat Konsistenzordnung $p = 2$. Welche Glattheit muss man von der Lösung des AWP voraussetzen?

   Bem.: Dieses Verfahren heißt *Crank-Nicolson-Verfahren* oder *Implizite Mittelpunktregel.*
   Hinweis: Zu a) Setzen Sie $\eta_1 := u_h(t) + \frac{h}{2} f(t+\frac{h}{2}, u_h(t) + \frac{h}{2}k_1)$ und zeigen Sie damit, dass (**) und (***) erfüllt sind. Umgekehrt setzen Sie zum Nachweis von (*) $k_1 := f(t+\frac{h}{2}, \eta_1)$.
   Zu b) Zur Bestimmung der Konsistenzordnung sollen **nicht** die Formeln (2.25) bis (2.27) aus [Rei12], 2.5, verwendet werden. Sie können benutzen, dass sich das Crank-Nicolson-Verfahren auch schreiben lässt als (s. Vorlesung)

$$u_h(t+h) = u_h(t) + hf\Big(t+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(u_h(t+h) + u_h(t))\Big).$$

9. **(Bonusaufgabe: Implizites Verfahren von Euler–Cauchy oder Implizite Trapezregel)**

   Das folgende Schema in Radau-Form

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2\,. \end{array}$$

hat als Verfahrensfunktion $f_h\big(t, u_h(t)\big) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\big(t, u_h(t)\big)$, wobei

$$k_1 = f\big(t, u_h(t)\big)\,,\ k_2 = f\big(t + h, u_h(t) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\big)\,.$$

Zeigen Sie:

a) Dieses Verfahren läßt sich als implizites Verfahren ähnlich dem verbesserten Verfahren von Euler–Cauchy schreiben,

$$f_h\big(t, u_h(t), u_h(t + h)\big) = \frac{1}{2}\Big(f\big(t, u_h(t)\big) + f\big(t + h, u_h(t + h)\big)\Big)\,.$$

b) Das Verfahren hat Konsistenzordnung $p = 2$, falls für die Lösung des AWP gilt, $u \in C^3(I)$.

Hinweis: Zur Bestimmung der Konsistenzordnung sollen **nicht** die Formeln (2.25) bis (2.27) aus [Rei12], 2.5, verwendet werden.

10. **(Praktische Aufgabe)**

Berechnen Sie Näherungslösungen für die Kippschwingung mit $\varepsilon = 0.1$, (s. [Rei12], Beispiel 2.3 und 2.5) mit Anfangsbedingungen $u(0) = 0, u'(0) = 1$ mit den folgenden expliziten Verfahren:

(A) Verbessertes Polygonzug-Verfahren ($m = 2$) (s. [Rei12], Bspl. 2.11);
(B) Verbessertes Verfahren von Euler-Cauchy ($m = 2$) (s. [Rei12], Bspl. 2.12);
(C) Optimales Verfahren ($m = 2$) (vgl. [Rei12], Beispiel. 2.19c);
(D) Einfache Runge–Kutta-Regel ($m = 3$), (s. [Rei12], Bspl. 2.22).

Rechnen Sie zum Vergleich auch (bei allen Verfahren) das klassische Runge–Kutta-Verfahren ($m = 4$) (mit numer. Lösung (y_h^1, y_h^2)) und vergleichen Sie die Differenz der numerischen Lösungen der beiden Verfahren; rechnen Sie mit Schrittweiten $h = 10^{-2}, 5{*}10^{-3}$. Rechnen Sie bis $T = 130$.

Tragen Sie dann in einer Grafik die zwei Lösungskurven für die Lösung u_h^1 des von Ihnen gerechneten Verfahrens sowie die Lösung y_h^1 des klass. Runge–Kutta-Verfahrens auf. Drucken Sie (Bezeichnungen wie in [Rei12], Beispiel 2.5 und Aufg. C.1)

$$t, u_h^1(t),\ y_h^1(t),\ u_h^1(t) - y_h^1(t),\ u_h^2(t),\ u_h^2(t) - y_h^2(t)$$

in Schritten von 5.0.

Hinweise: Gruppenabgabe ist <u>nicht</u> möglich; Zusammenarbeit ist durchaus erwünscht.

Endziffer Matrikel Nr.	Verfahren
0-4	(A) (D)
5-9	(B) (C)

Schicken Sie bis zum angegebenen Termin Ihre Lösung als Matlab- bzw. Octave-File an: timo.dornhoefer@student.uni-siegen.de

Literatur

[Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme.* (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.