

Übungen (4)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015
(Abgabetermin: Dienstag, 05.05.15, 10 Uhr)

11. **(Konsistenz eines Gauß-Verfahrens; Bonusaufgabe: 3 Punkte)** Zeigen Sie unter Benutzung der Formeln (2.25) und (2.27) aus [Rei12], dass das folgende implizite Verfahren (in Gauß-Form)

$$\begin{array}{c|cc} (3 - \sqrt{3})/6 & 1/4 & (3 - 2\sqrt{3})/12 \\ (3 + \sqrt{3})/6 & (3 + 2\sqrt{3})/12 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Konsistenzordnung $p = 4$ hat, wobei hinreichende Differenzierbarkeit der Lösung des AWP vorausgesetzt werden kann.

Hinweis: Hier ist $m = r = 2, p = 2m = 4$.

12. **(Lipschitz-Stetigkeit, verbessertes Polygonzugverfahren; 5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass das verbesserte Polygonzugverfahren Lipschitz-stetig ist, wenn die Bedingung

$$(L_0) \quad |f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq L_0 |y - \tilde{y}| \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in G_\rho$$

erfüllt und h hinreichend klein ist, wobei $u \in C^2(I)$ und

$$G_\rho := \{(t, y) \in I \times \mathbb{K} \mid |y - u(t)| \leq \rho, t \in I\}.$$

Hinweis: Orientieren Sie sich beim Beweis an der Lösung der Aufgabe B.7 in [Rei12].

Literatur

[Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme*. (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.