

Übungen (5)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015
(Abgabetermin: Dienstag, 12.05.15, 10 Uhr)

13. **(Stabilitätsfunktion, A-Stabilität; 6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass

a)

$$R_0(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

die Stabilitätsfunktion des impliziten verbesserten Polygonzugverfahrens

$$u_h(t+h) = u_h(t) + h f\left(t + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(u_h(t) + u_h(t+h))\right)$$

ist;

b) die Bedingung der A-Stabilität erfüllt ist, d.h. dass $|R_0(z)| \leq 1$ für alle $z : \operatorname{Re}(z) \leq 0$.

14. **(Stabilität von Einschrittverfahren, lineare autonome Systeme)**

Bestimmen Sie die maximale Schrittweite h , für die das „klassische“ 4-stufige Runge–Kutta-Verfahren das System

$$u'(t) = -10u(t) + 9v(t), \quad v'(t) = 9u(t) - 10v(t)$$

noch numerisch stabil integriert, d.h. es muss gelten $h\lambda_i \in \mathcal{I}_{RK}$, $i = 1, 2$, mit den Eigenwerten $\lambda_i = \lambda_i(A)$ des angegebenen Systems und dem Stabilitätsintervall $\mathcal{I}_{RK} = [-2.78, 0]$ des klassischen Runge–Kutta-Verfahrens.

Hinweis: Das angegebene Stabilitätsintervall ist mithilfe der Stabilitätsfunktion des klassischen Runge–Kutta-Verfahrens $R_0(z) = \sum_{j=0}^4 z^j/j!$ bestimmt worden (vgl. Abb. 2.4 in [Rei12]).

Literatur

[Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme.* (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.