Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungen (6)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015
(Abgabetermin: Dienstag, 19.05.15, 10 Uhr)

15. **(Stabilität von Differentialgleichungen)**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) = -u(t),\ t > 0\,.$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung um als ein System 1. Ordnung, $\underline{v}' = A\underline{v}$, und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

c) Entscheiden Sie, ob das zugehörige AWP (mit $t_0 = 0$) stabil ist.

Hinweise: Zu ...

b) Schauen Sie entweder in den Anhang A.3 von [Rei12] oder finden Sie ein Fundamentalsystem einfach durch Hinschauen.

c) Sie können entweder Satz 2.41 benutzen oder Bedingung (2.45) aus [Rei12] elementar überprüfen.

16. **(Lösung impliziter Gleichungen)**

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = -20u'(t) - 19u(t), \quad t \geq 0\,, \quad u(0) = 1,\, u'(0) = -10\,,$$

soll das Adams–Moulton-Verfahren mit Schrittzahl $s = 2$

$$u_j = u_{j-1} + \frac{1}{12}\,h(5f_j + 8f_{j-1} - f_{j-2})$$

verwendet werden. Dazu formen Sie die Differentialgleichung zunächst in ein System erster Ordnung um. Wie klein muss dann die Schrittweite h bemessen sein, damit in jedem Zeitschritt die Konvergenz der Fixpunktiteration zur Berechnung von u_j garantiert ist?
Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz! Wählen Sie für die Norm im R^2 : $\|\cdot\|_p$ mit $p = 1$ oder 2 oder ∞.

17. **(Lösung von Differenzengleichungen für Mehrschrittverfahren)**

Betrachten Sie das Milne-Verfahren (mit $s = 3$):

$$u_{j+2} - u_j = \frac{h}{3}\,(f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j)\,, \quad j = 0, \ldots, N_h - 2\,.$$

Geben Sie die Lösung des Verfahrens für die Testgleichung $u' = \lambda u$, $u(0) = 1$ an; verwenden Sie die Startwerte $u_0 = 1, u_1 = e^{\lambda h}$ mit Schrittweite $h > 0$ und $\lambda = -1$.

Hinweise: Verwenden Sie für die Lösung den Ansatz

$$u_j = \alpha \lambda_1^j + \beta \lambda_2^j\,, \quad j = 0, 1, \dots\,,$$

mit $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2h \pm \sqrt{9+3h^2}}{3+h}$.

Zeigen Sie damit, dass die Verfahrensgleichung erfüllt ist. Hierzu können Sie den Satz von Vieta oder elementare Überlegungen nutzen, um die quadratische Gleichung zu bestimmen, für die λ_1, λ_2 Nullstellen sind. Bestimmen Sie dann α und β aus den Startwerten $u_0 = 1$, $u_1 = e^{-h}$.

Literatur

[Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme.* (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.