Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungen (7)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2015

(Abgabetermin theor. Übung: Mittwoch, 27.05.15, 11:00 Uhr)[1]
(Abgabetermin prakt. Übungen: Dienstag, 02.06.15, 10 Uhr)[2]

18. **(Konsistenzordnung von Mehrschrittverfahren)**

Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Bedingung (a) aus [Rei12], Satz 3.11,

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=0}^{s} a_k = 0 \text{ und } \sum_{k=0}^{s} (k^\ell a_k - \ell k^{\ell-1} b_k) = 0 \text{ für } \ell = 1, \ldots, p\,,$$

die von $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Konsistenzordnung p des linearen Mehrschrittverfahrens

$$\frac{1}{h}\Big(u_h(t_3) + \gamma\big(u_h(t_2) - u_h(t_1)\big) - u_h(t_0)\Big) = \frac{3+\gamma}{2}(f_2 + f_1)\,,$$

für $t_j = t + jh,\ f_j = f\big(t_j, u_h(t_j)\big),\ j = 0,1,2,3,\ t \in I_h'\ (s = 3)\,.$

19. **(Praktische Aufgabe)**

Berechnen Sie Näherungslösungen für die Kippschwingung mit $\varepsilon = 0.1$ mit den folgenden Verfahren:

(a) Extrapolationsverfahren von Adams ($s = 4$):

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\big(55 f_{j-1} - 59 f_{j-2} + 37 f_{j-3} - 9 f_{j-4}\big)\,,$$

mit $f_j = f\big(t_j, u_h(t_j)\big)\,.$

(b) Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Adams ($s = 3$)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{12}\{23 f_{j-1} - 16 f_{j-2} + 5 f_{j-3}\}\,, \\ u_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\{9\tilde{f}_j + 19 f_{j-1} - 5 f_{j-2} + f_{j-3}\}\,, \quad j = 3, 4, \ldots\,, \end{aligned}$$

mit $\tilde{f}_j = f\big(t_j, \tilde{u}_h(t_j)\big)\,.$

(c) Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Nyström und Milne ($s = 3$):

$$\tilde{u}_h(t_j) = u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\big(7 f_{j-1} - 2 f_{j-2} + f_{j-3}\big)\,,$$

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\big(\tilde{f}_j + 4 f_{j-1} + f_{j-2}\big)\,,$$

mit $\tilde{f}_j = f\big(t_j, \tilde{u}_h(t_j)\big)\,.$

[1] Bitte in's Postfach im B-Gebäude, 2. Stock, bei dem Aufzug einwerfen!
[2] Wie immer an timo.dornhoefer@student.uni-siegen.de schicken.

(d) Verfahren von Nyström ($s = 4$):

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}(8f_{j-1} - 5f_{j-2} + 4f_{j-3} - f_{j-4})\,.$$

Vergleichen Sie die numerische Lösung mit der numerischen Lösung des klassischen RK-Verfahrens.

Rechnen Sie mit Schrittweiten $h = 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}$, und starten Sie bei der Anfangsbedingung aus Aufg. 10. Rechnen Sie bis $T = 130$.

Als Anlaufrechnung für $t_j = h, 2h$ bzw. $3h$ verwenden Sie die Näherungslösungen des klassischen RK-Verfahrens.

Tragen Sie dann in einer Grafik die zwei Lösungskurven für die Lösung u_h^1 der von Ihnen gerechneten Verfahren sowie die Lösung y_h^1 des klass. Runge–Kutta-Verfahrens auf. Drucken Sie (Bezeichnungen wie in [Rei12], Beispiel 2.5 und Aufg. C.1)

$$t, u_h^1(t),\, y_h^1(t),\, u_h^1(t) - y_h^1(t),\, u_h^2(t),\, u_h^2(t) - y_h^2(t)$$

in Schritten von 5.0.

Hinweise: Gruppenabgabe ist <u>nicht</u> möglich; Zusammenarbeit ist durchaus erwünscht.

Endziffer Matrikel Nr.	Verfahren
0-4	(b) (d)
5-9	(a) (c)

Literatur

[Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme.* (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.