**Prof. Dr. H.–J. Reinhardt**

**Dept. Mathematik**
**Univ. Siegen**

# Übungen (9)
# zur Vorlesung „Numerik II“
# im Sommersemester 2015
## (Abgabetermin: Dienstag, 16.06.15, 10:00 Uhr)

23. **(Konsistenz und Stabilität von Mehrschrittverfahren)**

Berechnen Sie die Konsistenzordnung des folgenden expliziten linearen Mehrschrittverfahrens,

$$u_{j+2} + 4u_{j+1} - 5u_j = 2h(2f_{j+1} + f_j)\,,$$

wobei $u_j = u_h(t_j),\ f_j = f(t_j, u_j)$. Ist es nullstabil?

*Hinweis:* Die Konsistenzordnung können Sie mit Hilfe der Bedingung (a) aus [Rei], Satz 3.11, bestimmen:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{s} a_k = 0 \text{ und } \sum_{k=0}^{s} (k^\ell a_k - \ell k^{\ell-1} b_k) = 0 \text{ für } \ell = 1, \ldots, p\,.$$

24. **(Stabilitätsgebiet linearer Mehrschrittverfahren)**

Zeigen Sie: Für das Stabilitätsgebiet $\mathcal{S}$ des folgenden Mehrschrittverfahrens (mit Schrittzahl $s = 2$)

$$u_{j+2} - 4u_{j+1} + 3u_j = -2hf_j$$

gilt

$$\mathcal{S} \cap (-\infty, 0) = \emptyset\,.$$

(D.h. für $\mu < 0$ erfüllen die Nullstellen des „Stabilitätspolynoms“ $\varphi_\mu(z) = \rho(z) - \mu\sigma(z)$ nicht die Wurzelbedingung.)

*Hinweis:*

i) Stellen Sie das Stabilitätspolynom des Verfahrens auf;
ii) Bestimmen Sie die Nullstellen für $\mu < 0$ und zeigen Sie, dass für mindestens eine Nullstelle $z_j$ gilt: $|z_j| > 1$.

25. **(Wronski-Determinante)**

Zeigen Sie für eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t)\ , \qquad t \in J := [\tau, \tau + a]\ ,$$

mit $a_1, a_0, f \in C(J)$, dass die *Wronski–Determinante* $W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$ für zwei Lösungen $u_1$, $u_2$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung selbst die Differentialgleichung erster Ordnung

$$W'(t) = -a_1(t)W(t)\ , \qquad t \in J\ ,$$

erfüllt und damit die Darstellung hat,

$$W(t) = W(\tau) \exp\left( - \int_{\tau}^{t} a_1(s) ds \right) \ , \qquad t \in J \ .$$

# Literatur


[Rei12] Reinhardt, H.-J., *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- u. Randwertprobleme.* (2.Aufl.) De Gruyter, Berlin, 2012.