Skriptum zum Vorkurs Mathematik im Wintersemester 2001/2002

erstellt von

Dipl.-Math. Mathias Charton

überarbeitete Version 2006

von

Dipl.-Math. Monika Dücker

und

Dipl.-Math. Markus Demmerling

Vorwort zur zweiten Auflage:
Neben der Berichtigung von Fehlern und der stilistischen Überarbeitung einiger Stellen unterscheidet sich die zweite Auflage in zwei Punkten von der ersten. Zum einen wurde von mir der Abschnitt 2.5 eingefügt. Er beschäftigt sich mit Betragsfunktionen und quadratischen Funktionen sowie den zugehörigen Gleichungen und Ungleichungen. Dies stellt eine sinnvolle Ergänzung und Vertiefung des Abschnitts 2.3 über Funktionen dar. Zum anderen wurde aufgrund des thematischen Zusammenhangs das ehemalige Kapitel 6 als Abschnitt 2.6 eingefügt.

Allen, die durch Bemerkungen und Anregungen zur Verbesserung beigetragen haben, sei an dieser Stelle gedankt.

Siegen, im August 2006 Dipl.-Math. Markus Demmerling

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der mathematischen Logik

Zu Grunde liegt Abschnitt 7 aus [SG94]. Zusätzlich wurden einige Elemente aus [Sch71] und aus [RS94] herangezogen.

Bezeichung 1.1 (Logik) *Als Logik bezeichnet man die Wissenschaft, die die Gesetze des (folge)richtigen Denkens erforscht.*

Bemerkung: Logik bestätigt oder widerlegt also nicht die Wahrheit, sondern zeigt nur auf, welche Konsequenzen es in unserem Denken hat, wenn wir bestimmte Dinge als gegeben annehmen. Man könnte Logik auch als die Lehre vom Schlußfolgern bezeichnen.

1.1 Aussagenlogik

Bezeichung 1.2 (Aussage) *Unter einer Aussage versteht man in der (zweiwertigen) Aussagenlogik ein sprachliches Gebilde, dessen Inhalt entweder wahr oder falsch ist. Nicht immer ist bekannt, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, es gibt jedoch keine Aussage, die weder wahr noch falsch ist, und ebenfalls kommt keine Aussage vor, die beides zugleich ist, d.h. es gibt genau die zwei Wahrheitswerte wahr (w) und falsch (f), die sich gegenseitig ausschließen. Eine Aussage, die weder eine weitere Aussage als Teil enthält noch Negation einer Aussage ist, nennt man elementare Aussage. Nichtelementare Aussagen heißen zusammengesetzt.*

Beispiele für (elementare) Aussagen (in Klammern jeweils der Wahrheitswert):

1. Die Erde ist ein Planet. (w)
2. 5 ist eine Primzahl. (w)
3. Bismarck war ein russischer Zar. (f)
4. Eisen ist ein organischer Stoff. (f)
5. Jede gerade Zahl ≥ 4 ist die Summe zweier Primzahlen (Goldbach-Vermutung). (?)

Beispiele für nicht elementare Aussagen:

1. Es gilt nicht, daß Steine auf der Erde nach oben fallen. (w)
2. Rubens war weder Maler noch Architekt. (f)

Keine Aussagen sind Sätze wie:

1. Guten Morgen! (Hier macht es keinen Sinn einen Wahrheitswert zuzuordnen.)
2. Walzer ist der schönste Tanz. (Dies ist sehr subjektiv.)
3. Dieser Satz ist falsch. (Jede Zuordnung eines Wahrheitswertes führt zu einem Widerspruch.)

Bezeichung 1.3 (Variable, Aussageform) *Eine Variable ist ein Symbol, das eine Leerstelle kennzeichnet, an die ein beliebiges Element einer vorher festgelegten Grundmenge treten kann. Ist diese die Menge der Aussagen und Wahrheitswerte, so spricht man von Aussagenvariablen. Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, das mindestens eine freie Variable enthält und in eine Aussage übergeht, sobald man ein Element der jeweiligen Grundmenge für jede freie Variable einsetzt. Aussageformen, die ausschließlich Aussagenvariablen enthalten, nennt man aussagenlogische Aussageformen.*

Beispiele:

1. „Aida ist eine Oper des Komponisten A.“

   Für A können sinnvollerweise Elemente aus der Grundmenge der Komponisten eingesetzt werden, wobei die Aussageform genau dann den Wert wahr annimmt, wenn man Guiseppe Verdi für A einsetzt.

2. „Entweder p oder q ist eine wahre Aussage.“

   Es handelt sich um eine aussagenlogische Aussageform, da p und q sinnvollerweise nur als Aussagenvariablen zu verstehen sind. Die Aussageform nimmt genau dann den Wert wahr an, wenn genau eine der beiden Variablen durch eine wahre Aussage (bzw. den Wahrheitswert w) und die andere durch eine falsche Aussage (bzw. den Wahrheitswert f) ersetzt wird.

Definition 1.4 (Wahrform, Falschform, Neutralform) *Eine aussagenlogische Aussageform A, die bei jeder Belegung ihrer Variablen den Wert wahr annimmt, heißt Wahrform (Tautologie, logisch wahre Aussageform, logisches Gesetz). Man schreibt $A \Leftrightarrow W$. Wird bei jeder Belegung ihrer Variablen der Wert falsch angenommen, so heißt eine aussagenlogische Aussageform Falschform (Kontradiktion, logisch falsche Aussageform, logischer Widerspruch). In Zeichen: $A \Leftrightarrow F$. Alle übrigen aussagenlogischen Aussageformen nennt man Neutralformen.*

Beispiele:

1. „Es gilt entweder p oder nicht p"
   ist eine Tautologie.

2. „Es gilt p und nicht p"
   ist ein Widerspruch.

3. „Es gilt p oder q"
   ist eine Neutralform.

Definition 1.5 (Junktionen, Junktoren) *Eine Abbildung, die einer oder mehreren Aussagen (bzw. Aussageformen) eine neue Aussage (bzw. Aussageform) zuordnet, nennt man Junktion. Für bestimmte gebräuchliche Junktionen gibt es allgemein übliche Symbole, die sogenannten Junktoren:* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \longleftrightarrow$ *, deren Bedeutung wir im folgenden beschreiben werden.*

Bezeichnung	Schreibweise	Sprechweise
Negation	$\neg$p	nicht p
Konjunktion	p $\wedge$ q	p und q
Disjunktion	p $\vee$ q	p oder q (einschließendes (inklusives) oder)
Subjunktion	$\neg$p $\vee$ q, auch: (p $\rightarrow$ q)	p subjungiert q, aus p folgt q
Bijunktion	(p $\rightarrow$ q) $\wedge$ (q $\rightarrow$ p), auch: (p $\leftrightarrow$ q)	p bijungiert q, p und q sind äquivalent
Antivalenz (Alternative)	$\neg$(p $\leftrightarrow$ q), auch: (p $\longleftrightarrow$ q)	entweder p oder q (ausschließendes (exklusives) oder)

In der Logik interessiert man sich nicht so sehr dafür, was eine Junktion bei konkreten Aussagen bewirkt, sondern man betrachtet die Bedeutung einer Junktion als ausreichend beschrieben, wenn man weiß, wie sich der Wahrheitswert der zugeordneten Aussage in Abhängigkeit von dem der ursprünglichen Aussage(n) verhält. Dazu dienen die sogenannten Wahrheitsfunktionen.

Definition 1.6 (Wahrheitsfunktionen) *Unter einer n-stelligen Wahrheitsfunktion versteht man eine Abbildung, die jedem n-Tupel von Wahrheitswerten genau einen Wahrheitswert zuordnet.*

Wahrheitsfunktionen beschreiben wir mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen (auch Wahrheitstafeln genannt). Diese Wahrheitstafeln sollen nun für die oben angegebenen Junktoren erstellt werden.

Wahrheitstafel zu den Verknüpfungen

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q	p ↔/ q
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	f	w
f	f	w	f	f	w	w	f

Mit Hilfe dieser Symbole kann man Sachverhalte, die in der Umgangssprache nur sehr umständlich zu beschreiben wären, sehr einfach ausdrücken. Außerdem lassen sich mit Hilfe von eindeutig definierten Symbolen Mißverständnisse vermeiden (vgl. die doppelte Bedeutung von „oder“)
Es folgen einige Übungen aus [Sch71] dazu:
S. 41,4:
Gegeben seien die Aussagen
p: Die Firma S stellt billige Möbel her.
q: Der Absatz verringert sich.
Schreiben Sie die folgenden Aussagen in der Formelsprache:

(a) Wenn die Firma S billige Möbel herstellt, verringert sich der Absatz.

(b) Die Firma S stellt billige Möbel her, aber der Absatz geht nicht zurück.

(c) Wenn der Absatz zurückgeht, stellt die Firma S keine billigen Möbel her.

(d) Es stimmt nicht, daß der Absatz genau dann zurückgeht, wenn die Firma S billige Möbel herstellt.

(e) Der Absatz geht dann und nur dann zurück, wenn die Firma S teure Möbel herstellt.

S. 42,7:
Gegeben seien die Aussagen
p: Die Braugerste war gut.
q: Das Bier ist billig.
Schreiben Sie die folgenden Aussagen in der Symbolsprache:

(a) Die Braugerste war gut, und das Bier ist billig.

(b) Die Braugerste war gut, aber das Bier ist nicht billig.

(c) Die Braugerste war schlecht, und das Bier ist teuer.

(d) Wenn die Braugerste schlecht ist, ist das Bier nicht billig.

(e) Immer dann, wenn die Braugerste schlecht ist, ist das Bier teuer.

(f) Entweder ist die Braugerste gut, oder das Bier ist billig.

(g) Weder die Braugerste war gut, noch war das Bier billig.

(h) Es stimmt nicht, daß die Braugerste gut war und das Bier billig ist.

S. 43,12:
Gegeben seien die Aussagen
p: Es ist kalt.
q: Es schneit.
Übersetzen Sie in die Umgangssprache:

(a) $(\neg p) \vee q$

(b) $p \wedge (\neg q)$

(c) $q \longrightarrow p$

(d) $p \longleftrightarrow q$

(e) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

(f) $[\neg(\neg p)] \longrightarrow (p \vee q)$

S. 43,13:
Gegeben seien die Aussagen
p: Paul ist reich. q: Paul ist glücklich.

Übersetzen Sie in die Umgangssprache:

(a) $p \wedge (\neg q)$

(b) $(\neg p) \vee q$

(c) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

(d) $p \rightarrow q$

(e) $(p \rightarrow q) \rightarrow q$

(f) $p \leftrightarrow q$

S. 44,18:
p,q,r seien Aussagen: p und q seien durch eine wahre und r durch eine falsche Aussage ersetzt. Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

(a) $(p \wedge q) \wedge (\neg r)$

(b) $p \rightarrow (q \vee (\neg r))$

(c) $p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(d) $(\neg p) \vee (q \rightarrow r)$

(e) $(p \vee q) \wedge (q \leftrightarrow r)$

(f) $(\neg p) \rightarrow (q \vee (\neg q))$

S. 45,20:
Geben Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen an, wenn p und q durch wahre Aussagen und r und s durch falsche Aussagen ersetzt werden:

(a) $[p \wedge (\neg q)] \vee r$

(b) $(p \vee q) \wedge (\neg s)$

(c) $[(\neg p) \rightarrow q] \rightarrow s$

(d) $[(\neg p) \rightarrow s] \vee q$

(e) $[(\neg p) \leftrightarrow r] \vee (s \wedge r)$

(f) $[(p \rightarrow q) \rightarrow s] \rightarrow r$

Man kann sich nun fragen, wie viele verschiedene n-stellige Wahrheitsfunktionen es gibt. Im Fall n=1 sind es offenbar vier (Identität, Negation, Wahrform, Falschform), wie man sich durch Aufstellen der entsprechenden Wahrheitstafeln unmittelbar klarmachen kann.

Satz 1.7 (Anzahl der Wahrheitsfunktionen) *Es gibt* 2^{2^n} *verschiedene n-stellige Wahrheitsfunktionen.*

Beweis:
Die Wahrheitstabelle einer n-stelligen Wahrheitsfunktion hat 2^n Zeilen, denn für jede Spalte (Stelle) hat man unabhängig voneinander 2 Möglichkeiten. Der Wert der Wahrheitsfunktion kann aber wiederum in jeder Zeile zwei Werte annehmen.

$\square$

Bemerkung 1.8 *Jeder aussagenlogischen Aussageform kann man genau eine zugehörige Wahrheitsfunktion zuordnen, die sich aus jeder möglichen Belegung ihrer Variablen mit Wahrheitswerten ergibt. Zu ein und derselben Wahrheitsfunktion lassen sich jedoch unterschiedliche Aussageformen angeben.*

Beispiel:
Zur Aussageform $\mathrm{p} \vee \mathrm{q}$ gehört dieselbe Wahrheitsfunktion, die auch zur Aussageform $\mathrm{q} \vee \mathrm{p}$ gehört (Überprüfung an der Wahrheitstabelle).
Im folgenden sei mit Aussageform immer eine aussagenlogische Aussageform gemeint. In der Logik ist nun die Beziehung zwischen verschiedenen Aussageformen bzw. den zugehörigen Wahrheitsfunktionen von besonderem Interesse.

Definition 1.9 (logische Implikation, logische Äquivalenz) *Seien A und B Aussageformen. Man sagt:*

- *A* impliziert *B* ($A \Rightarrow B$)*, wenn* $A \rightarrow B$ *eine Tautologie ist (andere Sprechweisen: wenn A, dann B; B folgt logisch aus A; A ist hinreichende Bedingung für B; B ist notwendige Bedingung für A). Man spricht von* logischer Implikation*.*

- *A ist* äquivalent *zu B* ($A \Leftrightarrow B$)*, wenn* $A \leftrightarrow B$ *eine Tautologie ist (andere Sprechweise: A genau dann, wenn B; A dann und nur dann, wenn B). Man spricht von* logischer Äquivalenz*.*

Beachte: Die Pfeile $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ bezeichnen also eine Beziehung zwischen Wahrheitsfunktionen, die Pfeile $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ verbinden Aussagen bzw. Aussageformen zu neuen Aussagen- bzw. Aussageformen. $\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}$ meint also die Aussageform: „Aus p folgt q“, während $p \Rightarrow q$ die Tatsache bezeichnet, daß q aus p logisch folgt, also $\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}$ eine Tautologie ist (was ja in dieser Allgemeinheit nicht stimmt, wie ein Blick auf die Wahrheitstabelle zeigt).
Beispiel:

$$\mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p} \vee \mathrm{q}, \text{ weil } \mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \rightarrow \mathrm{p} \vee \mathrm{q} \text{ eine Tautologie ist (Wahrheitstafel).}$$

1.2 Gesetze der Aussagenlogik

Kommutativgesetze

1. $\mathrm{p} \vee \mathrm{q} \Leftrightarrow \mathrm{q} \vee \mathrm{p}$
2. $\mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \Leftrightarrow \mathrm{q} \wedge \mathrm{p}$

Assoziativgesetze

1. $(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \vee \mathrm{r} \Leftrightarrow \mathrm{p} \vee (\mathrm{q} \vee \mathrm{r})$
2. $(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \wedge \mathrm{r} \Leftrightarrow \mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r})$

Distributivgesetze

1. $\mathrm{p} \vee (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r}) \Leftrightarrow (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{r})$
2. $\mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \vee \mathrm{r}) \Leftrightarrow (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{r})$

Idempotenzgesetze

1. $\mathrm{p} \vee \mathrm{p} \Leftrightarrow \mathrm{p}$
2. $\mathrm{p} \wedge \mathrm{p} \Leftrightarrow \mathrm{p}$

Absorptionsgesetze (Verschmelzungsgesetze)

1. $\mathrm{p} \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \Leftrightarrow \mathrm{p}$
2. $\mathrm{p} \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \Leftrightarrow \mathrm{p}$

de Morgan–Gesetze

1. $\neg(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{p} \wedge \neg\mathrm{q}$
2. $\neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{p} \vee \neg\mathrm{q}$

Andere Verneinungsgesetze

1. $\neg(\neg p) \;\Leftrightarrow\; p$
2. $\neg W \;\Leftrightarrow\; F$
3. $\neg F \;\Leftrightarrow\; W$

Satz vom ausgeschlossenen Dritten

$p \vee \neg p$ ist eine Tautologie.

Satz vom Widerspruch

$p \wedge \neg p$ ist eine Kontradiktion.

Kontrapositionsgesetz

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Transitivgesetz

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

Abtrenngesetze (mehr dazu im Kapitel über Beweismethoden)

1. $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$ (direkter Schluß)
2. $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ (indirekter Schluß)

Als Übung beweise man jeweils das erste Kommutativ-, Assoziativ-, Distributiv-, Absorbtions- und de-Morgan-Gesetz sowie das Kontrapositionsgesetz und das Transitivgesetz (Hinweis: Der Beweis erfolgt über das Aufstellen der entsprechenden Wahrheitstafeln).
Dann folgt die Bearbeitung der Aufgabe S. 74,15 (a),(b) aus [Sch71]:

(a) Was macht Paul, wenn die folgende Aussage wahr ist: „Es ist unrichtig, daß Paul nicht die Aufgaben macht oder daß Paul im Garten arbeitet.“

(b) Tante Katharina und Tante Maria unterhalten sich: die eine trinkt Kaffee, die andere ißt Schokolade. Was macht Tante Maria, wenn die folgende Aussage wahr ist: „es ist falsch, daß Tante Maria Kaffee trinkt oder nicht Schokolade ist.“

1.3 Existenz- und Universalaussagen

Existenz- und Universalaussagen beziehen sich auf Aussagen bzw. Aussageformen.

1.3.1 Existenzaussagen

Bisher war die Frage offengeblieben, ob es in der betrachteten Grundmenge überhaupt ein Element gibt, so daß bei Einsetzung in die Aussageform eine wahre Aussage entsteht.
Beispiele: Sei K die Menge der Komponisten. Wir betrachten folgende Aussageformen, denen die Menge K als Variablenbereich zugrundeliegt:

1. A beherrschte alle Musikinstrumente.
2. A hat die Oper Aida geschrieben.
3. A hat eine Oper geschrieben.

Im ersten Fall kann man keinen Komponisten für A einsetzen, so daß die Aussageform den Wert wahr liefert, im zweiten und dritten Fall lassen sich genau ein bzw. mehrere Komponisten finden, so daß eine wahre Aussage entsteht. Man führt dafür folgende Symbolik ein:

1. $\nexists A \in K$ A beherrschte alle Musikinstrumente.
2. $\exists!\ A \in K$ A hat die Oper Aida geschrieben.
3. $\exists A \in K$ A hat eine Oper geschrieben.

Beachte, daß nun Aussagen (sogenannte Existenzaussagen) aus den Aussageformen entstanden sind; die vorkommende Variable ist nicht mehr frei, sondern durch den Existenzquantor gebunden (man darf nicht mehr jedes beliebige Element der Grundmenge einsetzen).

1.3.2 Universalaussagen

Manche Aussageformen liefern für alle Elemente der Grundmenge den Wert wahr.
Beispiele: Sei K wie oben gegeben. Wir betrachten die Aussageformen:

1. A kann Noten lesen.
2. A hat eine Oper geschrieben.

Im ersten Fall kann man davon ausgehen, daß die Aussageform für jeden Komponisten wahr wird, im zweiten Fall gibt es auch Komponisten, für die die Aussageform falsch wird. Man benutzt hierfür den sogenannten Allquantor:

1. $\forall A \in K \quad$ A kann Noten lesen.

2. $\not\forall A \in K \quad$ A hat eine Oper geschrieben.

1.3.3 Verneinung von Existenz- und Universalaussagen

Oftmals sind in der Mathematik Verneinungen von komplizierteren Existenz- oder Universalaussagen zu bilden. Wir betrachten diese Aussagen als aus den zwei Teilen Quantor und Aussage(form) bestehend. Dann gilt:

1. Eine Existenzaussage wird verneint, indem man den Allquantor vor die verneinte Aussage(form) stellt.

2. Eine Universalaussage wird verneint, indem man den Existenzquantor vor die verneinte Aussage(form) stellt.

Beispiele:

1.
$$\begin{aligned} & \neg(\exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq 7 \wedge n \leq 10) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N} \quad \neg(n \geq 7 \wedge n \leq 10) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N} \quad \neg(n \geq 7) \vee \neg(n \leq 10) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N} \quad n < 7 \vee n > 10 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & \neg(\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{n ist eine Primzahl} \rightarrow \text{ n ist ungerade}) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists n \in \mathbb{N} \quad \neg(\text{n ist eine Primzahl} \rightarrow \text{ n ist ungerade}) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists n \in \mathbb{N} \quad \neg(\neg\text{n ist eine Primzahl} \vee \text{n ist ungerade}) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{n ist eine Primzahl} \wedge \text{n ist gerade} \end{aligned}$$

Bei Aussagen, die mehrere Quantoren enthalten, gilt folgende Faustregel: Zur Verneinung sind alle Quantoren umzudrehen (aus $\forall$ wird $\exists$ und umgekehrt) und die zugehörige Aussage(form) zu verneinen. Die Eigenschaften der Variablen unter dem Quantor sind dabei jeweils beizubehalten.
Beispiel:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \geq n\, \exists k \in \mathbb{N} \quad k > m) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \geq n\, \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq m \end{aligned}$$

1.4 Notwendige und hinreichende Bedingung

Siehe hierzu das Kapitel 7.5 in [SG94].

1.5 Beweismethoden

Dieser Abschnitt knüpft an Kapitel 8 aus [SG94] an.
Ein mathematischer Satz hat die Form $V \Rightarrow B$.
V=Voraussetzungen
B=Behauptung
Ein Beweis eines Satzes muß ausgehend von der Wahrheit von V die Wahrheit von B zeigen, unter Umständen mit Hilfe von schon früher bewiesenen Ergebnissen.
Die Mathematik kennt drei prinzipiell verschiedene Beweismethoden: Den direkten, den indirekten und den Beweis mittels vollständiger Induktion.

1.5.1 Der direkte Beweis

Beim direkten Beweis überführt man eine wahre Aussage mittels logischer Folgerung in die Behauptung. Da bei korrekter Folgerung aus etwas Wahrem nur etwas Wahres folgen kann, hat man somit die Wahrheit der Behauptung bewiesen.
Beispiel: [SG94] S. 104.
Beim Beweisen von Gleichungen besteht der direkte Beweis im Überführen der einen Seite in die andere Seite mittels bereits als gültig erkannter Umformungen.
Beispiel: 1. binomische Formel
Behauptung: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Beweis:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a(a+b) + b(a+b) \\
&= aa + ab + ba + bb \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

Aufgabe: [SG94] S. 107, 1 (Start mit rechter Seite der Behauptung, elementare Umformungen und Einsetzen der linken Seite der Voraussetzung führen zur linken Seite der Behauptung).

1.5.2 Der indirekte Beweis

Beim indirekten Beweis macht man die Annahme, daß die Behauptung falsch sei, und folgert daraus eine falsche Aussage (meist ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung). Da etwas Falsches logisch nur aus etwas Falschem folgen kann, muß die Annahme falsch, mithin die Behauptung richtig gewesen sein.
2 Beispiele aus [SG94] S. 105.
3. Beispiel:
Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis:
Hier setzen wir, ohne es zu beweisen, voraus, daß zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ eine Primzahl existiert, die n teilt.
Angenommen, es gibt endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, dann ist $l := p_1 \cdot \ldots p_n + 1$ durch keins der $p_k, k = 1, \ldots, n$ teilbar, es muß also eine Primzahl außer $p_1, \ldots, p_n$ existieren, die l teilt. Widerspruch.

1.5.3 Der Beweis durch vollständige Induktion

Dieses Beweisprinzip nutzt man zum Beweis von Behauptungen über alle natürlichen Zahlen ab einem n_0.
2 Beispiele aus [SG94] S. 106.
Zugrunde liegt das Prinzip der vollständigen Induktion:
Wenn eine Aussage über natürliche Zahlen A(n) für eine bestimmte Zahl n_0 gilt und aus der Gültigkeit von A(n) für eine beliebige natürliche Zahl n auch auf die Gültigkeit von A(n+1) (also der Aussage für den Nachfolger von n) geschlossen werden kann, so ist die Aussage wahr für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$.
Der Induktionsbeweis erfordert daher zwei Schritte:

1. Induktionsanfang: Zeige $A(n_0)$
2. Induktionsschritt: Zeige $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Beweise an dieser Stelle die zwei eben angeführten Beispiele aus [SG94] sowie als Aufgabe: [SG94] S. 107, 3 a),b).

1.5.4 Falsche Beweise

Von einem chinesischen Weisen wird erzählt, daß er in einer Zeit, in der das Überschreiten der Grenze mit Pferden strengstens untersagt war, einen Grenzposten mit Hilfe des folgenden „Beweises“ davon überzeugte, daß der Schimmel, auf dem er ritt, kein Pferd sei und er folglich passieren dürfe:

Ein Pferd kann braun sein. Ein Schimmel kann nicht braun sein, also ist ein Schimmel kein Pferd. (Man hat nur: Es existiert ein Pferd das braun ist, man brauchte aber für einen korrekten Beweis: Alle Pferde sind braun.)
Weitere Beispiele:
[SG94] S. 104
[Kon92]: S. 52, 1b),3 ; S. 120,22 ; S. 201,17.

2 Mengen, Relationen und Abbildungen

2.1 Mengen

Definition 2.1 („naiver“ Mengenbegriff nach Cantor) *Eine* Menge *ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen, wohlbestimmten Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens. Die Objekte dieser Zusammenfassung nennt man* Elemente.

Schreib- und Sprechweisen:

$a \in S$	a ist ein Element der Menge S; a liegt in S;
$a \notin S$	a ist kein Element von S; a liegt nicht in S;
$S = \{a, b, c\}$	Die Menge S besteht aus den Elementen a, b, c (aufzählende Schreibweise);
$S = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$	S ist die Menge aller reellen Zahlen, die positiv sind (Angabe der die Elemente charakterisierenden Eigenschaft);

Anmerkungen und Beispiele:

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bezeichnen die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und der komplexen Zahlen.

2. $$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\};$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset = \{\} \quad \text{(leere Menge)};$$

3. Die Reihenfolge ist irrelevant, und eine Mehrfachaufzählung (wohlunterschieden!) ist nicht zulässig:
$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\}.$$
Keine Menge ist $\{a, b, c, a, b\}$.

Bemerkung 2.2 (Russelsche Antinomie) *Die Grenzen des naiven Mengenbegriffs werden an folgendem Beispiel deutlich. Eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält, wie z.B. die natürlichen Zahlen, heißt Normalmenge. Wenn man nun versucht, die Menge M aller Normalmengen zu bilden und fragt, ob M normal ist, so stößt man auf den Widerspruch, daß, wenn M normal wäre, es sich selbst als Element enthalten müßte und folglich nicht normal wäre. Wäre dagegen M nicht normal, so enthielte es sich selbst als Element, im Widerspruch dazu, daß alle Mengen in M normal sind.*

Definition 2.3 *Seien S, T, V, K, P, T_1 und T_2 Mengen.*

1. *T heißt* Teilmenge *von S (i.Z. $T \subset S,\ S \supset T$), wenn jedes Element, das in T liegt, auch ein Element von S ist. Man sagt dann auch: T ist enthalten in S, S ist* Obermenge *von T, S enthält T. Gilt zusätzlich $T \neq S$, so heißt T* echte Teilmenge *von S (i.Z. $T \subsetneq S$).*

2. *S heißt* Schnitt(menge) *von T_1 und T_2, wenn S die Menge aller Elemente ist, die sowohl in T_1 als auch in T_2 liegen (i.Z. $S = T_1 \cap T_2$).*

3. *V heißt* Vereinigung(smenge) *von T_1 und T_2, wenn V die Menge aller Elemente ist, die in T_1 oder T_2 (oder beiden Mengen) liegen (i.Z. $V = T_1 \cup T_2$).*

4. *Gilt $T \subset S$, so heißt K das* Komplement *von T in S, wenn K die Menge aller Elemente ist, die in S, aber nicht in T liegen (i.Z. $K = S \setminus T$ oder, wenn klar ist innerhalb welcher Menge das Komplement gebildet wird: $K = T'$ oder $K = \overline{T}$).*

5. *Die* Produktmenge *P von S und T besteht aus allen geordneten Paaren (s, t) mit $s \in S$ und $t \in T$ (i.Z. $P = S \times T$). Statt Produktmenge sagt man auch* kartesisches Produkt. *Für die Produktmenge $S \times S$ schreibt man auch S^2.*

6. *Die* Potenzmenge *$\mathcal{P}(S)$ einer Menge S ist definiert als die Menge, die aus allen Teilmengen von S besteht.*

Beispiele:
Betrachte $G = \{n \in \mathbb{N} \mid 2|n\}$ und $H = \{n \in \mathbb{N} \mid 2|(n+1)\}$, also die Menge der geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen. Dann gilt:

1. $G \subset \mathbb{N},\ H \subset \mathbb{N}$;

2. $G \subsetneq \mathbb{N} \supsetneq H$;

3. $G \cap H = \emptyset,\ \{n \in G \mid n \geq 4\} \cap \{n \in G \mid n \leq 5\} = \{4\}$;

4. $G \cup H = \mathbb{N}$;

5. $\mathbb{N} \setminus G = G' = H,\ \mathbb{N} \setminus H = H' = G$;

6. $\{n \in G \mid n \leq 6\} \times \{m \in H \mid m \leq 3\} = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3\}$
   $= \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$;

7. Die Punkte der Zeichenebene werden mit Elementen aus $\mathbb{R}^2$ identifiziert (kartesisches Koordinatensystem).

Es gelten folgende **Rechenregeln** (A, B, C Mengen) (s. auch [RS94] S. 1f):

(R1)	$A \subset B \ \wedge \ B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C$	(Transitivität von „$\subset$“)
(R2)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(Assoziativgesetze)
(R3)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
(R4)	$A \cup B = B \cup A$	(Kommutativgesetze)
(R5)	$A \cap B = B \cap A$	
(R6)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(Distributivgesetze)
(R7)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
(R8)	$A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C, \ A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	

Bemerkung 2.4

1. *Um $T \subset S$ zu zeigen, kann man auch $a \notin S \Rightarrow a \notin T$ beweisen (Kontrapositionsgesetz!) (Außerhalb von S gibt es kein Element von T, also liegt T ganz in S.).*

2. *Ist S eine beliebige Menge, dann gilt für jedes $a \notin S$ auch $a \notin \emptyset$. Somit folgt: $\emptyset \subset S$.*

3. *Schnitt, Vereinigung und Produktmenge kann man auch für mehr als zwei Mengen $S_1, \ldots, S_n$ definieren:*

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i = S_1 \cap \ldots \cap S_n = \{x \mid \forall\ 1 \leq i \leq n : \ x \in S_i\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S_1 \cup \ldots \cup S_n = \{x \mid \exists\ 1 \leq i \leq n : \ x \in S_i\},$$

$$\prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times \ldots \times S_n = \{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_i \in S_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

4. *Zwei Mengen S und T sind gleich, wenn $S \subset T$ und $T \subset S$ gilt, d.h. wenn $a \in S$ äquivalent zu $a \in T$ ist.*

Übung:

1. Sei $B = \{0, 1\}$. Bestimme $B^3 = B \times B \times B$. (Bemerkung: Man erhält damit die Antwort auf die Frage: Welche verschiedenen Binärzahlen kann ein Dreibit-Computer darstellen?)

2. Sei $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(S)$ und die Anzahl der Elemente (*Ordnung, Kardinalität, Mächtigkeit*) von $\mathcal{P}(S)$ (i.Z. $|\mathcal{P}(S)|$, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(S))$, $\mathrm{ord}(\mathcal{P}(S))$ oder auch $\#\mathcal{P}(S)$).

3. Seien S und T Mengen. Beweise:

   i) $S \cap T \subset S$;

   ii) $S \subset S \cap T \ \wedge \ T \subset T \cap S \ \Rightarrow \ S = T$;

   iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz);

   iv) $(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$;

Lösung:

1.
$$\begin{aligned} B \times B \times B \ = \ & \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0), \\ & (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}; \end{aligned}$$

2.
$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$$

   und
$$|\mathcal{P}(S)| = 8 = 2^3 = 2^{|S|};$$

   Bemerkung: Für jede endliche Menge M gilt: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

2.2 Relationen

Definition 2.5 (Relation) *Seien M, N Mengen und $R \subset M \times N$. Dann heißt R* Relation *zwischen M und N. Gilt $M = N$, so heißt R Relation auf M. Gilt für $(x, y) \in M \times N$ die Beziehung $(x, y) \in R$ („x steht in Relation R zu y“), so schreibt man dafür auch $R(x, y)$ oder xRy.*

Beispiele:

1. Sei M die Menge der Lehrer einer Schule, N die Menge der Schulklassen. Dann wird durch

$$R_1 := \{(x, y) \in M \times N \mid x \text{ unterrichtet die Klasse } y\}$$

eine Relation zwischen M und N definiert. Eine andere Relation zwischen M und N wäre etwa

$$R_2 := \{(x, y) \in M \times N \mid x \text{ ist Geschichtslehrer von } y\}.$$

Es gilt hier $R_2 \subset R_1$.

2. Sei S eine Menge. Dann definiert

$$R_T := \{(A, B) \in (\mathcal{P}(S))^2 \mid A \subset B\}$$

eine Relation auf $\mathcal{P}(S)$, die sogenannte *Teilmengenrelation*.

3. Jede Relation auf $\mathbb{R}$ läßt sich nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystems mit einer Punktmenge der Zeichenebene identifizieren, z.B. in einem kartesischen Koordinatensystem die Relation

$$K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

mit dem Einheitskreis.

Eine besondere Rolle in der Mathematik spielen sogenannte Äquivalenzrelationen, die man wie folgt definiert:

Definition 2.6 (Äquivalenzrelation) *Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Relation $\sim$ auf M heißt* Äquivalenzrelation, *wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $\forall\, x \in M:\ x \sim x$ (Reflexivität)*;*

2. $x \sim y \ \Rightarrow\ y \sim x$ (Symmetrie)*;*

3. $x \sim y\ \wedge\ y \sim z\ \Rightarrow\ x \sim z$ (Transitivität).

Man nennt dann $x^\sim := \{y \in M \mid x \sim y\}$ die Äquivalenzklasse *von x und bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen mit $M/\sim$.*

Satz 2.7 *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:*

a) Für jedes $x \in M$ gibt es ein $y^\sim \in M/\sim$, so daß $x \in y^\sim$ gilt.

b) Zwei Äquivalenzklassen besitzen genau dann nichtleeren Durchschnitt, wenn sie gleich sind.

Beweis:
a) Es gilt $x \in x^\sim$ wegen der Reflexivität.
b) Z.z.:

$$x^\sim \cap y^\sim \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; x^\sim = y^\sim.$$

Zeige $\Leftarrow$:
Nach a) ist $x \in x^\sim$. Daraus folgt nach Vor. $x \in y^\sim$, also $x \in x^\sim \cap y^\sim$ und folglich $x^\sim \cap y^\sim \neq \emptyset$.
Zeige $\Rightarrow$:
Da nach Vor. $x^\sim \cap y^\sim \neq \emptyset$, gibt es mindestens ein Element z in diesem Durchschnitt, also $z \sim x \;\wedge\; z \sim y$. Sei nun $a \in x^\sim$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a \sim x \\
&\Rightarrow \quad a \sim x \;\wedge\; x \sim z \;\wedge\; z \sim y \\
&\Rightarrow \quad a \sim y \\
&\Rightarrow \quad a \in y^\sim.
\end{aligned}$$

Ist umgekehrt $a \in y^\sim$, so folgt ganz analog:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a \sim y \\
&\Rightarrow \quad a \sim y \;\wedge\; y \sim z \;\wedge\; z \sim x \\
&\Rightarrow \quad a \sim x \\
&\Rightarrow \quad a \in x^\sim.
\end{aligned}$$

□

Der vorhergehende Satz besagt, daß durch eine Äquivalenzrelation eine vollständige Aufteilung einer Menge in disjunkte Klassen vorgenommen wird.
Beispiele:
Sei M die Menge der deutschen Worte. Dann wird durch

$$\sim := \{(x, y) \in M \mid x \text{ und } y \text{ enthalten die gleichen Buchstaben}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M erklärt. Ist etwa x = Lager, so gilt z.B. Regal $\in x^\sim$.
Übung:
Wir definieren auf der Menge $\mathbb{Z}$ folgende Relationen. Entscheide, ob es sich dabei um Äquivalenzrelationen handelt oder nicht! Falls ja, dann gib die Äquivalenzklassen an.

1. $R_1 := \{(n,m) \in \mathbb{Z} \mid n = m\}$;
2. $R_2 := \{(n,m) \in \mathbb{Z} \mid 2|n \ \wedge \ 4|m\}$;
3. $R_3 := \{(n,m) \in \mathbb{Z} \mid k|(n-m)\}, \ k \in \mathbb{Z}$;
4. $R_4 := \{(n,m) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid nm > 0\}$;
5. $R_5 := \{(n,m) \in \mathbb{Z} \mid n = m \ \vee \ n = m+1 \ \vee \ n = m-1\}$.

Lösung:
R_2 ist keine Äquivalenzrelation, da sie zwar transitiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch ist. R_5 ist zwar reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv. R_1, R_3 und R_4 sind Äquivalenzrelationen. Wichtig ist vor allem (z.B. in der Zahlentheorie) die Relation R_3. durch die die sogenannten *Restklassen* modulo k erzeugt werden.

Eine Relation R zwischen M und N läßt sich auch verstehen als eine Zuordnung, bei der gewissen Elementen von M ein oder mehrere Elemente aus N zugeordnet werden. Ein Element $y \in \mathbb{N}$ wird einem Element x danach genau dann zugeordnet, wenn $R(x,y)$ (d.h. $(x,y) \in R$) gilt.
Eine Relation R zwischen M und N nennt man eindeutig, wenn gilt:

$$\forall \ x \in M \ \exists! \ y \in N : \ R(x,y).$$

Eine eindeutige Relation nennt man auch *Abbildung* oder *Funktion*.

2.3 Abbildungen

Definition 2.8 *Eine Zuordnung, bei der jedem Element einer Menge M genau ein Element einer Menge N zugeordnet wird, heißt* Abbildung (Funktion). *Bezeichnet man die Abbildung mit f und ist $y \in N$ das Element, das $x \in M$ zugeordnet wird, dann heißt y das* Bild *von x unter f, oder auch der Wert von f an der Stelle x. Das Bild von M unter f oder kurz das Bild von f ist definiert als*

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} \subset N.$$

Das Bild von f heißt auch Wertebereich *von f.*

Schreib- und Sprechweisen:
$f : M \to N$ f ist eine Abbildung von M nach N.
M heißt *Definitionsbereich* oder *Definitionsmenge*.
N heißt *Zielmenge*.
$y = f(x)$ y ist das Bild von x unter f.

Für $M_1 \subset M$ heißt $f(M_1) := \{f(x) \mid x \in M_1\} \subset N$ das Bild von M_1 unter f. Analog definiert man zu jeder Teilmenge N_1 von N das sogenannte *Urbild*:

$$f^{-1}(N_1) := \{x \in M \mid f(x) \in N_1\}.$$

Bemerkung 2.9 *Zu einer Abbildung gehören Definitionsbereich, Zielmenge sowie Zuordnungsvorschrift, d.h. zwei Abbildungen sind genau dann gleich, wenn sie nicht nur in der Zuordnungsvorschrift, sondern auch in Definitions- und Zielmenge übereinstimmen.*

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Für das Bild von f gilt

$$f(\mathbb{R}) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

2.

$$\begin{aligned}
&g : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4,5,6\},\\
&g(a) = g(b) = g(c) = 1,\ g(d) = 6;\\
&g(\{a,b,c,d\}) = \{1,6\},\ g(\{a\}) = g(\{a,b,c\}) = \{1\};
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&h : \{0,1,2,3\} \to \{0,1\} \times \{0,1\},\\
&h(0) = (0,0),\ h(1) = (0,1),\ h(2) = (1,0),\ h(3) = (1,1);
\end{aligned}$$

   Offenbar liegt eine Binärkodierung der Zahlen 0, 1, 2, 3 vor.
   Dieses Beispiel legt die folgenden Fragen nahe: Kann es vorkommen, daß zwei Zahlen auf die gleiche Weise kodiert werden? Braucht man den ganzen Kodierungsbereich oder kommen große Teile nicht vor?

Sei f eine Abbildung von M nach N. Das Bild von f ist immer eine Teilmenge der Zielmenge (s.o.). Außerdem können i.a. zwei verschiedene m_1, m_2 das gleiche Bild unter f besitzen. Wir kennzeichnen die folgenden Spezialfälle:

Definition 2.10 *Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt*

1. surjektiv, *wenn $f(M) = N$ gilt.*

2. injektiv, *wenn für beliebige $x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in M$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Äquivalent dazu ist (Kontrapositionsgesetz!):*

$$\forall\ x_1, x_2 \in M :\ f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2.$$

3. bijektiv*, falls f sowohl surjektiv als auch injektiv ist.*

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
   f ist nicht injektiv, da $f(-1) = 1 = f(1)$. f ist nicht surjektiv, da keine negative reelle Zahl existiert, die zu $f(\mathbb{R})$ gehört, also $f(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$.

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$.
   g ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \ \Rightarrow\ g(x_1) \neq g(x_2).$$
   g ist surjektiv, denn für alle $y \in \mathbb{R}$ existiert ein $\mathbb{R} \ni x := y - 1$ mit $g(x) = g(y - 1) = (y - 1) + 1 = y$, d.h. $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Die Eigenschaften Injektivität und Surjektivität und damit auch die Bijektivität hängen ganz wesentlich von Definitions- und Zielmenge und nicht nur von der Zuordnungsvorschrift ab. Betrachte f definiert durch $f(x) = x^2$ für verschiedene Definitions- und Zielmengen: ($\mathbb{D}$ bzw. $\mathbb{W}$):

$\mathbb{D}$	$\mathbb{W}$	surjektiv	injektiv	bijektiv
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nein	nein	nein
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{\geq 0}$	ja	nein	nein
$\mathbb{R}^{\leq 0}$	$\mathbb{R}$	nein	ja	nein
$\mathbb{R}^{\leq 0}$	$\mathbb{R}^{\geq 0}$	ja	ja	ja

Übung:
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$;

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$;

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ f(x) = x^4$;

4. $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ f(x) = x^4$;

5. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(x) = \frac{1}{x}$;

6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{x}$;

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

8. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$;

9. $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$.

Bezeichnung:
Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Die Abbildung $f : M \to M,\ f(x) = x$ wird als *identische Abbildung* oder auch *Identität* auf M (i.Z. id_M) bezeichnet.

Definition 2.11 *Seien S, T, U Mengen und $f : S \to T,\ g : T \to U$ Abbildungen. Dann ist die* Komposition *(Hintereinanderausführung) $g \circ f : S \to U$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Satz 2.12 *Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann*

1. *surjektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert, so daß $f \circ g = id_N$ gilt.*

2. *injektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert, so daß $g \circ f = id_M$ gilt.*

3. *bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert, so daß $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$ gilt. g heißt in diesem Fall die* Umkehrabbildung *von f (Bez.: $g = f^{-1}$). Die Umkehrabbildung ist, obwohl sie mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird wie das Urbild, von diesem streng zu unterscheiden.*

Beweis:
Sei f surjektiv. Dann gilt für alle $y \in N$:

$$f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset.$$

Als Bild von y unter g wählt man ein beliebiges Element aus $f^{-1}(\{y\})$ aus und hat so eine Abbildung g mit der gewünschten Eigenschaft $f \circ g = id_N$ definiert.
Ist umgekehrt eine solche Abbildung g vorhanden, so ist f surjektiv, denn zu $y \in N$ ist $g(y)$ ein Urbild.
Sei f nun injektiv. Dann definiert man ($x_0 \in M$ beliebig):

$$g(y) = \left\{ \begin{array}{ll} x_0, & y \notin f(M) \\ x, & y = f(x) \end{array} \right\}.$$

Offenbar hat g die gewünschte Eigenschaft $g \circ f = id_M$.
Ist umgekehrt eine solche Abbildung g vorhanden, so ist f injektiv, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ und folglich mit $g \circ f = id_M$ der Zusammenhang $x_1 = x_2$.
Ist f bijektiv, so sind die jeweils zur Injektivität und Surjektivität definierten Abbildungen g identisch.
Ist umgekehrt eine Abbildung g mit den beiden Eigenschaften $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$ gegeben, so folgt mit dem ersten und zweiten Teil dieses Satzes, daß f sowohl surjektiv als auch injektiv, also bijektiv sein muß.
$\square$

Übung:

1. Beweise: Es seien $f : A \to B,\ g : B \to C$ Abbildungen und $g \circ f$ sei surjektiv, dann ist auch g surjektiv.

2. Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ bzw. $g(x) = x + 1$. Bestimmen sie $f \circ g$ und $g \circ f$ und vergleichen Sie! Was läßt sich daraus schließen?

3. Beweise: Seien S, T, U, V Mengen und $f : S \to T,\ g : T \to U,\ h : U \to V$ Abbildungen. Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, d.h. die Komposition ist assoziativ.
Hinweis: Der Beweis erfolgt mittels getrennter Betrachtung beider Seiten.

Lösung:

1.

$$\begin{array}{rl} & g \circ f \text{ surjektiv} \\ \Rightarrow & \forall\, z \in C\ \exists\, x \in A :\ z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ \overset{y:=f(x)}{\Rightarrow} & \forall\, z \in C\ \exists\, y \in B :\ z = g(y) \\ \Rightarrow & g \text{ surjektiv.} \end{array}$$

2.4 Mengenvergleiche

Dieser Abschnitt basiert im Wesentlichen auf [Heu90] S. 137ff.
Frage: Wie kann man ohne die Sitzplätze und die Passagiere zu zählen, feststellen, ob in einem Bus genau so viele Passagiere wie Sitzplätze vorhanden sind?
Antwort: Dies ist der Fall, falls alle Plätze belegt sind (surjektiv) und keiner der Passagiere mehr steht (injektiv), d.h. wenn es eine bijektive Abbildung von der Menge P der Passagiere auf die Menge S der Sitzplätze gibt.
Entsprechend kann man eine größere Anzahl von Sitzplätzen als Passagieren durch die Existenz einer injektiven, aber nicht surjektiven Abbildung von P nach S, und eine kleinere Anzahl von Sitzplätzen als Passagieren durch die Existenz einer surjektiven, aber nicht injektiven Abbildung zeigen (wohlgemerkt ohne zu zählen).
Historisches Beispiel: [Heu90] S. 137.
Wir nutzen diese Methode nicht nur für endliche, sondern auch für unendliche Mengen (bei denen also das Operieren mit endlichen Anzahlen versagen würde).

Definition 2.13 *Seien $M, N \neq \emptyset$. M und N heißen* gleichmächtig *(oder äquivalent), falls es eine bijektive Abbildung von M nach N (und damit auch von N nach M) gibt.*

Bemerkung 2.14 *Diese Definition läßt zu, daß zwei Mengen gleichmächtig sind, obwohl die erste eine echte Teilmenge der zweiten ist.*

Beispiele:
$f : \mathbb{N} \to G,\ n \mapsto 2n,\ g : \mathbb{N} \to Q,\ n \mapsto n^2$ sind bijektive Abbildungen der natürlichen auf die geraden Zahlen G bzw. auf die Quadratzahlen Q.

Definition 2.15 *Eine Menge M heißt* abzählbar*, wenn sie gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist. Sie heißt* höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar ist.*

Satz 2.16 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis:
Cauchysches Diagonalverfahren ([Heu90] S. 138)

□

Satz 2.17 *Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder höchstens abzählbar.*

Beweis:
Wende das Cauchysche Diagonalverfahren auf $M_1 = \{m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}, \ldots\}$, $M_2 = \{m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}, \ldots\}$, $M_3 = \{m_{3,1}, m_{3,2}, m_{3,3}, \ldots\}, \ldots$ an.

$\square$

Beispiel: (Hilberts Hotel)
Mathematiker sind ein gastliches Völkchen. Man stelle sich ein Hotel mit abzählbar vielen Zimmern vor, das voll belegt ist. Ein weiterer Gast kommt: Verlege jeden Gast in das Zimmer mit nächsthöherer Nummer und dann den Neuankömmling in Zimmer 1.
Ein Bus mit 40 weiteren Gästen: Jeder Gast addiert 40 zu seiner Zimmernummer, die neuen Gäste werden in Zimmer $1-40$ untergebracht.
Es kommen abzählbar viele Busse mit abzählbar vielen Gästen: Cauchysches Diagonalverfahren (alternativ: Die bisherigen Gäste verdoppeln ihre Zimmernummern und der $k-$te Insasse des $n-$ten Busses erhält die Zimmernummer $(2k-1)2^n-1$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
bish. G.		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x	
1. Bus ($n=1$)	x				x				x				x				x				x		
2. Bus ($n=2$)			x								x								x				
3. Bus ($n=3$)							x																x

Nach dem letzten Satz fragt man sich, ob nicht jede unendliche Menge abzählbar ist. Der nächste Satz zeigt, daß dies nicht zutrifft.

Satz 2.18 *Die Menge aller Zahlenfolgen, die man aus* 0 *und* 1 *bilden kann, ist überabzählbar.*

Beweis: [indirekt]
Angenommen, man könnte die Zahlenfolgen numerieren und

$$(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots)$$

sei die $n-$te Folge. Dann entsteht folgendes Schema:

1. Folge	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$\ldots$
2. Folge	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$\ldots$
3. Folge	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Setze $b_k := 1 - a_{k,k},\ k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus 0 und 1 bestehend, die nicht in obigem Schema auftritt, da sie an der $n-$ten Stelle nicht mit $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ übereinstimmt. Widerspruch.

$\square$

Satz 2.19 $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar (Man sagt auch* überabzählbar*).*

Beweisskizze:
Es reicht, zu zeigen, daß die reellen Zahlen in $[0, 1)$ nicht abzählbar sind. Dazu benutzt man, daß jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ darstellen läst (s. z.B. [Heu90] S. 163). Die Menge aller unendlichen Ziffernfolgen enthält die Menge aller Folgen aus 0 und 1, die nach dem letzten Satz schon überabzählbar ist. $\square$

2.5 Verschiedene Arten von (Un-)Gleichungen

2.5.1 (Un-)Gleichungen mit Beträgen

Definition 2.20 *Die* Betragsfunktion $|\cdot|$ *ist definiert durch*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} \right\}.$$

Definition 2.21 *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_+ und f_- definiert durch*

$$f_+(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{array} \right\} \quad \textit{bzw.} \quad f_-(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Beispiele:

a) $2|x - 7| < 7(x + 2) + |5x + 2|$;
Aufgrund der Beträge ist eine Fallunterscheidung notwendig:

i) $x - 7 \geq 0 \ \wedge \ 5x + 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq 7 \ \wedge \ x \geq -\frac{2}{5} \ \Leftrightarrow \ x \geq 7$;

$$\begin{aligned} & 2(x - 7) < 7(x + 2) + 5x + 2 \\ \Leftrightarrow \ & 2x - 14 < 12x + 16 \\ \Leftrightarrow \ & -30 < 10x \\ \Leftrightarrow \ & x > -3; \end{aligned}$$

insgesamt liefert dies: $x \geq 7 \ \wedge \ x > -3 \ \Leftrightarrow \ x \geq 7 :\ \mathbb{L}_1 = [7, \infty[$;

ii) $x-7<0 \ \wedge \ 5x+2\geq 0 \ \Leftrightarrow \ x<7 \ \wedge \ x\geq -\frac{2}{5} \ \Leftrightarrow \ -\frac{2}{5}\leq x<7$;

$$\begin{aligned} & 2(7-x) < 7(x+2)+5x+2 \\ \Leftrightarrow \quad & 14-2x < 12x+16 \\ \Leftrightarrow \quad & -2 < 14x \\ \Leftrightarrow \quad & x > -\tfrac{1}{7}; \end{aligned}$$

insgesamt liefert dies: $-\frac{2}{5}\leq x<7 \ \wedge \ x>-\frac{1}{7} \ \Leftrightarrow \ -\frac{1}{7}<x<7$: $\mathbb{L}_2 = \,]-\frac{1}{7},7[$;

iii) $x-7\geq 0 \ \wedge \ 5x+2<0 \ \Leftrightarrow \ x\geq 7 \ \wedge \ x<-\frac{2}{5}$ (Widerspruch!); insgesamt liefert dies: $\mathbb{L}_3=\{\}$;

iv) $x-7<0 \ \wedge \ 5x+2<0 \ \Leftrightarrow \ x<7 \ \wedge \ x<-\frac{2}{5} \ \Leftrightarrow \ x<-\frac{2}{5}$;

$$\begin{aligned} & 2(7-x) < 7(x+2)-(5x+2) \\ \Leftrightarrow \quad & 14-2x < 2x+12 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 < 4x \\ \Leftrightarrow \quad & x > \tfrac{1}{2}; \end{aligned}$$

insgesamt liefert dies: $x<-\frac{2}{5} \ \wedge \ x>\frac{1}{2}$ (Widerspruch!): $\mathbb{L}_4=\{\}$;

$\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2\cup\mathbb{L}_3\cup\mathbb{L}_4=[7,\infty[\,\cup\,]-\frac{1}{7},7[\,\cup\{\} \ \cup \ \{\}=\,]-\frac{1}{7},\infty[$;

b) $|f|=f_+ + f_-$;
Aufgrund der Beträge ist eine Fallunterscheidung notwendig:

i) $f(x)\geq 0: \ |f(x)|=f(x)=f(x)+0=f_+(x)+f_-(x)$;
ii) $f(x)<0: \ |f(x)|=-f(x)=0-f(x)=f_+(x)+f_-(x)$;

somit gilt für alle $x\in\mathbb{D}: \ |f(x)|=f_+(x)+f_-(x)$, d.h. $|f|=f_+ + f_-$;

Übung:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $|1-|2-|x|||=1$!

b) Beweisen Sie $f=f_+ - f_-$!

Lösung:

a) Aufgrund der Beträge ist eine Fallunterscheidung notwendig:

i)
$$\begin{aligned} & 1-|2-|x||=1 \\ \Leftrightarrow\ & |2-|x||=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2=|x| \\ \Leftrightarrow\ & x=2\ \vee\ x=-2; \end{aligned}$$

somit gilt: $\mathbb{L}_1 = \{-2,2\}$;

ii) $1-|2-|x||=-1 \ \Leftrightarrow\ 2=|2-|x||$;

I) $2-|x|=2 \ \Leftrightarrow\ |x|=0 \ \Leftrightarrow\ x=0$;
somit gilt: $\mathbb{L}_2=\{0\}$;

II) $2-|x|=-2 \ \Leftrightarrow\ |x|=4 \ \Leftrightarrow\ x=4\ \vee\ x=-4$;
somit gilt: $\mathbb{L}_3=\{-4,4\}$;

$\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2\cup\mathbb{L}_3=\{-2,2\}\cup\{0\}\cup\{-4,4\}=\{-4,-2,0,2,4\}$;

b) Aufgrund der Beträge ist eine Fallunterscheidung notwendig:

i) $f(x)\geq 0: \ f(x)=f(x)-0=f_+(x)-f_-(x)$;

ii) $f(x)<0: \ f(x)=0-(-f(x))=f_+(x)-f_-(x)$;

somit gilt für alle $x\in\mathbb{D}: \ f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, d.h. $f=f_+-f_-$;

2.5.2 Quadratische (Un-)Gleichungen

Definition 2.22 *Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der Form*

$$f(x)=ax^2+bx+c, \quad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$$

heißt quadratische Funktion (Parabel).
Ist $f(\alpha)$ der kleinste Funktionswert im Fall $a>0$ bzw. ist $f(\alpha)$ der größte Funktionswert im Fall $a<0$, dann heißt der Punkt $S=(\alpha,f(\alpha))$ der Scheitelpunkt *der Parabel.*

Bemerkung 2.23 *Ist $|a|>1$, so liegt eine* Streckung *der Parabel vor; ist $0<|a|<1$, so liegt eine* Stauchung *der Parabel vor. Im Fall $a=1$ verwendet man i.a. die Schreibweise x^2+px+q für ax^2+bx+c.*

Satz 2.24 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Dann ist

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

der Scheitelpunkt der Parabel.

Beweis:
Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erhält man die sog. *Scheitelpunktsform*:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 + \frac{ab}{a}x + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{ab^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

a) Ist $a > 0$, dann ist $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichheit gilt offensichtlich genau dann, wenn $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ gilt, also für $x = -\frac{b}{2a}$. Damit lautet der kleinste Funktionswert

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

also $S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

b) Ist $a < 0$, dann ist $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichheit gilt offensichtlich genau dann, wenn $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ gilt, also für $x = -\frac{b}{2a}$. Damit lautet der größte Funktionswert

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

also $S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

$\square$

Beispiele:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1;\; S = (3, -1);$

b) $g(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4;\; S = (1, 4);$

c) $h(x) = -x^2 + 11 = -(x-0)^2 + 11;\; S = (0, 11);$

d) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4;\; S = (-3, 4);$

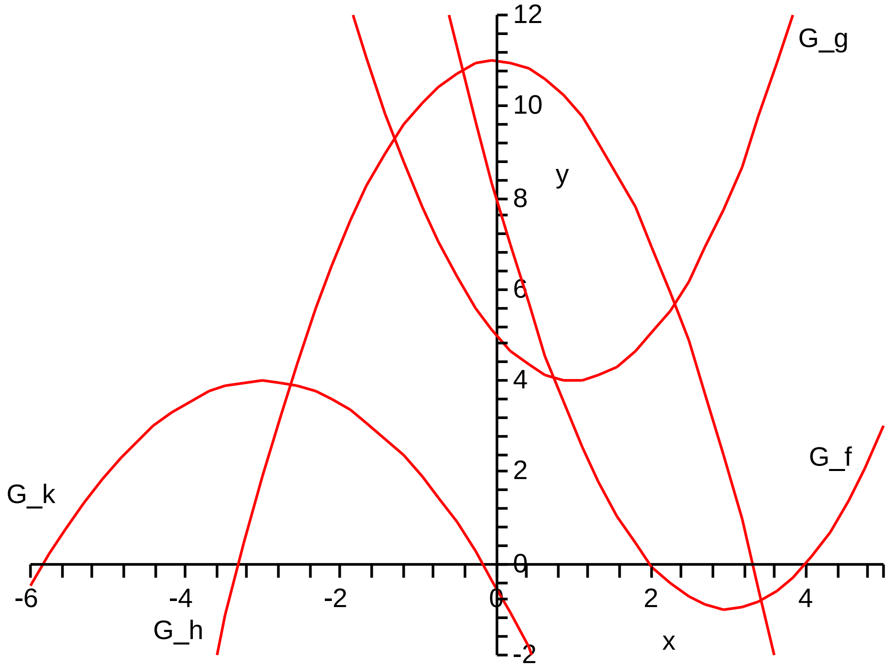

Abbildung 1: Die Graphen der Funktionen f, g, h und k.

Satz 2.25 *Sei f eine quadratische Funktion. f besitzt genau i) zwei Nullstellen, ii) eine Nullstelle bzw. iii) keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, wenn für die* Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

i) $D > 0$, ii) $D = 0$ bzw. iii) $D < 0$ gilt. Die Nullstellen lauten dann

$$i)\ x_1 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \quad ii)\ x = -\frac{b}{2a}.$$

Beweis:
Es gilt

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Damit erhät man schließlich

$$\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \\
\overset{*}{\Leftrightarrow}\quad & x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \\
\Leftrightarrow\quad & x = -\frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}.
\end{aligned}$$

*: Für $D < 0$ ist diese Gleichung in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, für $D = 0$ ergibt sich die Lösung $x = -\frac{b}{2a}$.

□

Bemerkung 2.26 *Ist $D = 0$, so nennt man $x = -\frac{b}{2a}$ auch eine* doppelte *Nullstelle von f.*
Im Fall $a = 1$ ist $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Die Nullstellen lauten somit

$$i)\ x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad ii)\ x = -\frac{p}{2}$$

($p - q-$Formel).

Satz 2.27 *Die quadratische Funktion f besitze die Nullstellen x_1 und x_2, wobei $x_1 = x_2$ zugelassen ist. Dann gilt*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \textit{und} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

und f läßt sich darstellen durch

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(Satz von Vieta).

Beweis:
Die Nullstellen x_1 und x_2 haben die Darstellung

$$x_1 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} - \frac{b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}) = -\frac{b}{a},$$
$$x_1 x_2 = \left(-\frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(-\frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Damit erhält man schließlich

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) \\ &= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right) + a\frac{c}{a} \\ &= ax^2 + bx + c \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\square$

Beispiele:
Berechnung von Nullstellen quadratischer Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - x - 6$;
$x = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \;\Rightarrow\; x = 2 \;\vee x = 3$;

b) $g(x) = -2x^2 - 6x + 8$;
$x = -\frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{4}(6 \pm \sqrt{100}) \;\Rightarrow\; x = -4 \;\vee x = 1$;

Übung:
Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$;

b) $g(x) = -5x^2 + 10$;

Lösung:

a) $x = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 9} = 3 \pm \sqrt{0} = 3$;

b) $x = -\frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot (-5) \cdot 10}}{2 \cdot (-5)} = \pm \frac{1}{10}\sqrt{200} \;\Rightarrow\; x = -\sqrt{2} \;\vee\; x = \sqrt{2}$;

Bemerkung 2.28 *Jede quadratische Ungleichung läßt sich leicht auf eine der folgenden Formen bringen:*

$$x^2 + px + q < 0, \quad x^2 + px + q \leq 0, \quad x^2 + px + q > 0, \quad x^2 + px + q \geq 0.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung kann man mit Hilfe der $p-q-$Formel direkt angeben:

	$f(x) < 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \{\}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \{\}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left]-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right[$

	$f(x) \leq 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \{\}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \{-\frac{p}{2}\}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]$

	$f(x) > 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{p}{2}\}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right[\;\cup\; \left]-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \infty\right[$

	$f(x) \geq 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] \;\cup\; \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \infty\right[$

Übung:
Lösen Sie die folgenden quadratischen Ungleichungen:

a) $x^2 + 5x > 7x + 3$;

b) $2x^2 - 6x + 4 \leq 6x - 12$;

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 5x > 7x + 3 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 2x - 3 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+1)(x-3) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x < -1 \;\vee\; x > 3;
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge lautet also: $\mathbb{L} =]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$.

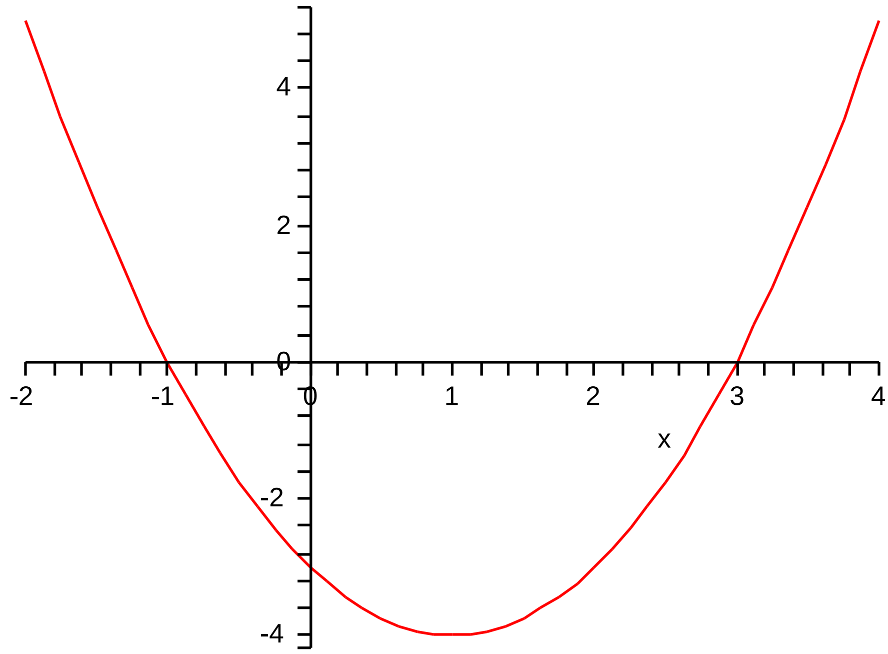

Abbildung 2: Anhand des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x - 3$ läßt sich die Lösungsmenge leicht ablesen.

b)

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 6x + 4 \leq 6x - 12 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-2)(x-4) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 \leq x \leq 4; \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet also: $\mathbb{L} = [2, 4]$.

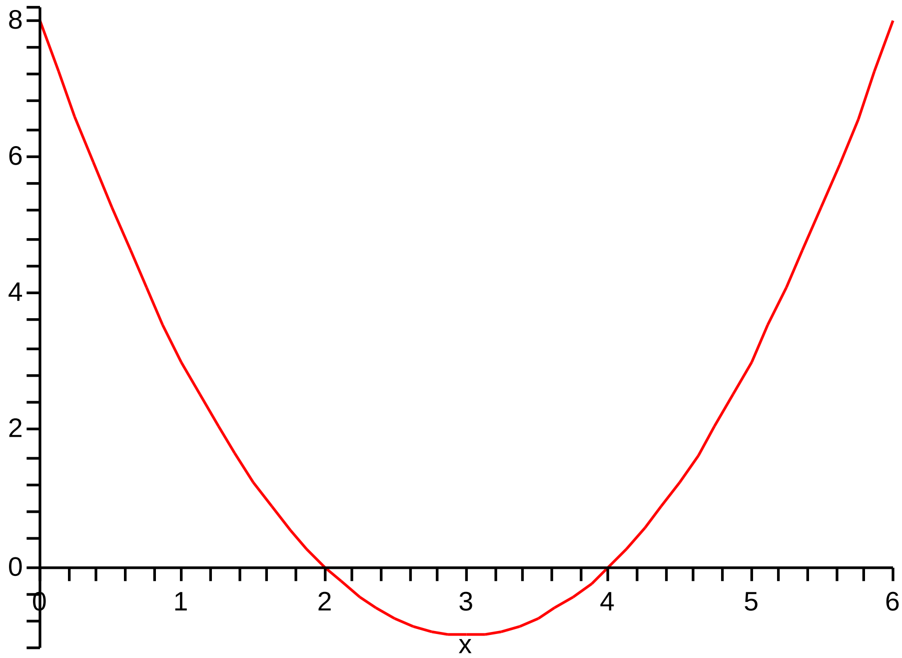

Abbildung 3: Anhand des Graphen der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 6x + 8$ läßt sich die Lösungsmenge leicht ablesen.

2.5.3 Sonstiges

Beispiele:

a) Wurzelgleichung:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-1} \ \Rightarrow\ x-1 = x^2-1 \ \Leftrightarrow\ x^2-x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \vee x = 1;$$

Eine Probe liefert folgendes Ergebnis:
$x = 0 :\ \sqrt{0-1} = \sqrt{-1}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht definiert, also ein Widerspruch! Also gilt $0 \notin \mathbb{L}$.
$x = 1 :\ \sqrt{1-1} = 0 = \sqrt{1^2-1}$, also gilt $1 \in \mathbb{L}$.

b) Quadrieren von Ungleichungen:

$$x > -3 \underset{?}{\overset{?}{\rightleftarrows}} x^2 > 9;$$

Es gilt hier weder die eine noch die andere Richtung:

„$\Rightarrow$“: $x = 2 : 2 > -3$ (w) $\not\Rightarrow$ $4 = 2^2 > 9$ (f), also gilt diese Richtung nicht.

„$\Leftarrow$“: $x = -4 : 16 = (-4)^2 > 9$ (w) $\not\Rightarrow$ $-4 > -3$ (f), also gilt diese Richtung nicht.

Bemerkung 2.29 *Das Quadrieren von Gleichungen kann dazu führen, daß die Lösungsmenge vergrößert wird (vgl. Beispiel a)). Deshalb ist dieser Vorgang i.a. keine äquivalente Umformung. Daher ist eine Probe sinnvoll.*
Bei Ungleichungen kann sogar der Fall auftreten, daß noch nicht einmal mehr die Hinrichtung gilt (vgl. Beispiel b)). Daher ist beim Quadrieren große Vorsicht geboten, da man anderenfalls falsche Ergebnisse erhält!

2.6 Einige nützliche Ungleichungen

Satz 2.30 *Für n nichtnegative Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt immer:*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Insbesondere gilt im Spezialfall $n = 2$:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

(Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel).

Beweis:
Entweder induktiv (nicht leicht) oder mit Hilfe der Konkavität und Monotonie der Logarithmus-Funktion.

□

Satz 2.31 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Für je n reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

Beweis:
Sei

$$A := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}, \; B := \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

Im Fall $A = 0$ oder $B = 0$ wird die Ungleichung trivial, wir betrachten daher nur $A, B > 0$. Division durch AB liefert dann die zur Behauptung äquivalente Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq 1$$

wobei

$$\alpha_k = |a_k|/A, \ \beta_k = |b_k|/B, \ k = 1, \ldots, n.$$

Es läßt sich nun mit Hilfe von Satz 2.31 für $n = 2$ und des Zusammenhangs

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2/A^2 = 1 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2$$

herleiten:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k^2 \beta_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

□

Satz 2.32 (Minkowskische Ungleichung) *Für je n reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gilt:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis:
O.B.d.A. sei $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 > 0$, sonst steht auf der linken Seite 0 und die Behauptung ist trivial. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) a_k + \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) b_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| |b_k| \\
&\overset{\text{C.-S.}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \right).
\end{aligned}$$

Division durch $\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2}$ liefert die Behauptung.

3 Grundlagen der Kombinatorik

3.1 Vorbemerkungen

Dieses Kapitel stützt sich weitgehend auf [SG94], Abschnitt 10.
Seien $a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}, k, l \in \mathbb{Z}$. Wir verwenden im folgenden das Symbol

$$\prod_{i=k}^{l} a_i := \begin{cases} a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_l, & k < l \\ a_k, & k = l \\ 1, & k > l \end{cases} .$$

Definition 3.1 (Fakultät) *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl*

$$\prod_{i=1}^{n} i$$

heißt $n!$ (lies: n-Fakultät).

Definition 3.2 (Binomialkoeffizienten) *Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Unter dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ versteht man die Zahl:*

$$\frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!}$$

Satz 3.3 (Eigenschaften der Binomialkoeffizienten) *Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

1. $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,, \ \binom{n}{1} = n$$

2. *Für $n < k$ ist*
$$\binom{n}{k} = 0$$

3. *Für $n \geq k$ gilt die Darstellung*
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
und die Symmetriebedingung
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

4. Es gilt:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Beweis:

1. Die Eigenschaft folgt direkt aus der Definition der Binomialkoeffizienten.

2. Für $n < k$ ist einer der Faktoren im Zähler 0.

3. Für $n \geq k$ ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!} \\
&= \frac{\left(\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i\right)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

   Es folgt

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

4.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!} + \frac{\prod\limits_{i=n-(k+1)+1}^{n} i}{(k+1)!} \\
&= \frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!}\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) \\
&= \frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!}\left(\frac{k+1+n-k}{k+1}\right) \\
&= \frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!}\left(\frac{n+1}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{i=(n+1)-(k+1)+1}^{n+1} i}{(k+1)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

□

Satz 3.4 (binomischer Lehrsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Beweis: [vollständige Induktion]
n=0:

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} a^i \cdot b^{0-i}$$

$n \mapsto n+1$:
Induktionsvoraussetzung:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Induktionsbehauptung:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&= (a+b) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{(n+1)-(n+1)} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$$

$\square$

Folgerung 3.5

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$\square$

Man kann die Binomialkoeffizienten sehr übersichtlich im sogenannten Pascalschen Dreieck anordnen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}$$

....

Sei im folgenden M immer eine endliche Menge mit $|M| = n$. In der Kombinatorik beschäftigt man sich mit verschiedenen Arten von Zusammenstellungen von Elementen von M. Dabei können alle Elemente oder nur ein Teil von M Verwendung finden, die Reihenfolge kann eine Rolle spielen oder nicht, und es können Wiederholungen bestimmter Elemente zugelassen werden oder nicht.

3.2 Permutationen

Definition 3.6 *Eine Permutation von M ist eine Zusammenstellung*

- *aller Elemente von M*
- *ohne Wiederholungen,*
- *wobei die Reihenfolge wesentlich ist.*

Beispiele:
Siehe [SG94], S. 126.
Bemerkung:
Eine Permutation von M kann man auch aufassen als eine bijektive Abbildung f von der Menge $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich selbst ($f(i) = j$ bedeutet dann, daß das j-te Objekt aus M den i-ten Platz bei einer elementweisen Aufzählung erhält).
In einem Urnenmodell (n von 1 bis n durchnumerierte Kugeln) würde man, um eine Permutation zu erhalten, alle Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen entnehmen und jeweils die gezogene Nummer notieren.

Satz 3.7 *Die Anzahl P_n der Permutationen einer n-elementigen Menge ist*

$$P_n = n!$$

Beweis:
Um eine Permutation zu erhalten, müssen n Objekte auf n Plätze verteilt werden. Für den ersten Platz hat man n Möglichkeiten, ein Objekt auszuwählen, für den zweiten noch $(n-1)$ usw. also insgesamt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten.

□

Anwendungen:
Anzahl der möglichen Sitzordnungen bei einer Party (n Stühle, n Gäste).
Anzahl der Möglichkeiten einer Reihenfolge beim Zieleinlauf eines Laufwettbewerbs.

Definition 3.8 *Eine Permutation von M mit Wiederholung ist eine Zusammenstellung*

- *aller Elemente von M,*

- *wobei das i-te Element k_i mal auftritt und*
- *die Reihenfolge wesentlich ist.*

Eine Permutation mit Wiederholung enthält $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ Elemente.

Beispiele:
wie in [SG94] S. 127 (ersetze dort k durch n, n_k durch k_i, n durch k).
Bemerkung:
Eine Permutation von M mit Widerholung kann man auch aufassen als eine surjektive Abbildung f von $\mathbb{N}_k$ nach $\mathbb{N}_n$, bei der das Element i k_i mal getroffen wird $(i = 1, \ldots n)$. (Hierbei bedeutet $f(i) = j$, daß auf dem i-ten Platz das j-te Element von M steht). Eine weitere Interpretation wäre anschaulich gesprochen, daß man n Kästchen hat, in die k verschiedene Elemente so hineingelegt werden, daß im i-ten Kästchen jeweils k_i Elemente liegen.
In einem Urnenmodell würde man, um eine Permutation mit Wiederholung zu erhalten, aus einer Urne mit jeweils k_i Kugeln der Sorte i $(i = 1, \ldots, n)$ nacheinander ohne Zurücklegen alle Kugeln entnehmen und jeweils die gezogene Sorte notieren.

Satz 3.9 *Die Anzahl $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ der Permutationen einer n-elementigen Menge, wobei das i-te Element k_i mal auftritt ist:*

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Beweis: Wären die k Elemente in den Permutationen voneinander verschieden, so gäbe es $k!$ Permutationen. Tritt das i-te Element k_i-mal auf, so fallen, da für k_i Elemente $k_i!$ Permutationen existieren $k_i!$ Permutationen zu einer zusammen, d.h. die Anzahl ist durch $k_i!, i = 1, \ldots, n$ zu teilen.

$\square$

Anwendung:
Anzahl aller möglichen Kartenverteilungen beim Skat:

$$\frac{32!}{10!10!10!2!} = 2.753.294.408.504.640$$

3.3 Variationen

Definition 3.10 *Sei $\mathbb{N} \ni k \leq n$. Eine Variation von M zur k-ten Klasse (ohne Wiederholung) ist eine Zusammenstellung*

- *von k Elementen aus M*
- *ohne Wiederholungen,*
- *wobei die Reihenfolge wesentlich ist.*

Beispiele:
Wie in [SG94], S. 128.
Bemerkung:
Eine Variation von M zur k-ten Klasse kann man auch auffassen als injektive Abbildung von $\mathbb{N}_k$ nach M (Es werden k Plätze an unterschiedliche Elemente aus M vergeben).
In einem Urnenmodell würde man, um eine Variation von M zur k-ten Klasse zu erhalten, k Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen entnehmen und jeweils die gezogene Nummer notieren.

Satz 3.11 *Die Anzahl $V_n^{(k)}$ der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse ist*

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beweis:
Um eine Variation der n Elemente zur k-ten Klasse zu erhalten, müssen k der n Objekte auf k Plätze verteilt werden. Für den ersten Platz hat man n Möglichkeiten, ein Objekt auszuwählen, für den zweiten noch (n-1) usw. also insgesamt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten.

$\square$

Anwendung:
Anzahl der Möglichkeiten, mit viermaligem Würfeln jeweils eine unterschiedliche Augenahl zu werfen (Verteile 4 von 6 Objekten(Augenzahlen) auf 4 Plätze).

Definition 3.12 *Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Variation von M zur k-ten Klasse mit Wiederholung ist eine Zusammenstellung*

- *von k Elementen aus M,*
- *wobei ein Element bis zu k-mal auftreten darf*
- *und die Reihenfolge wesentlich ist.*

Eine Variation von M zur k-ten Klasse mit Wiederholung ist also ein k-Tupel von Elementen aus M, d.h. ein Element aus $M^k = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k-mal}$.

Beispiele: wie in [SG94] S. 130.
Bemerkung:
Eine Variation von M zur k-ten Klasse mit Wiederholung kann man auch auffassen als Abbildung von $\mathbb{N}_k$ nach M (Es werden k Plätze an (unter Umständen identische) Elemente aus M vergeben).
In einem Urnenmodell würde man, um eine Variation von M zur k-ten Klasse mit Wiederholung zu erhalten, k Kugeln nacheinander mit Zurücklegen entnehmen und jeweils die gezogene Nummer notieren.

Satz 3.13 *Die Anzahl* $V_{W_n}^{(k)}$ *der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholungen ist*

$$V_{W_n}^{(k)} = n^k$$

Beweis:
Um eine Variation von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung zu erhalten, hat man für jeden der k zu besetzenden Plätze n Möglichkeiten, also insgesamt n^k.

□

Anwendung:
Fußballtoto (13er Wette). Es gibt $3^{13} = 1594323$ verschiedene Ausfüllmöglichkeiten für einen Totoschein.
Es gibt 20 Aminosäuren, aus denen Proteine bestehen können. Ein Protein bestehe aus hundert Aminosäuren. Wieviele verschiedene Proteine dieser Art können gebildet werden?
Antwort: $20^{100} \sim 10^{130}$ Möglichkeiten. Angenommen, wir setzen pro Sekunde 1000 jeweils verschiedene Proteine zusammen, so benötigen wir etwa 10^{119} Jahre, um alle Kombinationen einmal erreicht zu haben, das ist weit mehr als das 10^{100} fache der Zeit, die selbst großzügige Menschen als Erdalter schätzen. Was auch immer Gott bei der Erschaffung des Lebens tat, er hat nicht gewürfelt!

3.4 Kombinationen

Definition 3.14 *Sei $\mathbb{N} \ni k \leq n$. Eine Kombination von M zur k-ten Klasse (ohne Wiederholung) ist eine Zusammenstellung*

- *von k Elementen aus M*
- *ohne Wiederholungen,*
- *wobei die Reihenfolge unwesentlich ist.*

Beispiele:
wie in [SG94] S. 131f
Bemerkung:
Eine Kombination von M zur k-ten Klasse kann man auch auffassen als eine k-elementige Teilmenge von M.
In einem Urnenmodell würde man, um eine Kombination von M zur k-ten Klasse zu erhalten, k Kugeln auf einmal entnehmen und lediglich festhalten, welche Kugeln man überhaupt entnommen hat.

Satz 3.15 *Die Anzahl $C_n^{(k)}$ der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ist*

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

Beweis:
Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse war

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Die Kombinationen unterscheiden sich von den Variationen dadurch, daß die Anordnung nicht berücksichtigt wird, das bedeutet, es fallen alle $k!$ Permutationen der k Elemente in einer Kombination zu einer zusammen. Deshalb gilt:

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Anwendungen:

1. Lotto 6 aus 49. Es gibt

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

verschiedene Ziehungen und

$$r_i = \binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}$$

Möglichkeiten für (genau) i Richtige. Es ist $r_1 = 5775588$,$r_2 = 1851150$, $r_3 = 246820$,$r_4 = 13545$,$r_5 = 258$,$r_6 = 1$.

2. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es mit vier Würfeln unterschiedliche Augenzahlen zu werfen (Also alle 4-elementigen Teilmengen einer 6-elementigen Menge, also $\binom{6}{4}$.)?

3. Wieviele Begegnungen gibt es bei einem Tennisturnier mit 8 Teilnehmern, wenn jeder gegen jeden spielt? Antwort: $\binom{8}{2} = 28$

Definition 3.16 *Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Kombination von M zur k-ten Klasse mit Wiederholung ist eine Zusammenstellung*

- *von k Elementen aus M,*
- *wobei sich ein Element bis zu k-Mal wiederholen darf*
- *und die Reihenfolge unwesentlich ist.*

Beispiele:
wie in [SG94], S. 133
Bemerkung:
In einem Urnenmodell würde man, um eine Kombination von M zur k-ten Klasse mit Wiederholung zu erhalten, k Kugeln mit Zurücklegen ziehen und nachher die Reihenfolge des Ziehens vergessen (die Kugeln also z.B. in aufsteigender Reihenfolge notieren (wie bei Mengen)).

Satz 3.17 *Die Anzahl $C_{W_n}^{(k)}$ der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung ist*

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

Beweis:
Vorüberlegung: Es gilt für $n, k \in \mathbb{N}$ bel.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{k+i-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$

Beweis:[Induktion über n bei beliebigem, aber festem k]
n=1:

$$1 = \binom{k+1-1}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$$

$n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \binom{k+i-1}{k} &= \sum_{i=1}^{n} \binom{k+i-1}{k} + \binom{k+n}{k} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \binom{n+k}{k+1} + \binom{k+n}{k} \\
&= \binom{n+k+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun die Behauptung durch vollständige Induktion über k bei beliebigem aber festem n:
k=1:

$$C_{W_n}^{(1)} = n = \binom{n+1-1}{1}$$

$k \mapsto k+1$:
Nehmen wir an, die Behauptung sei bis k bewiesen (I.V.). Weiter seien die Elemente von M von 1 bis n numeriert. Da die Reihenfolge bei Kombinationen unerheblich ist, seien o.B.d.A. alle Kombinationen intern aufsteigend nach ihrer Ordnungszahl sortiert. Man erhält nun alle Kombinationen der n Elemente zur k+1-ten Klasse aus den Kombinationen der n Elemente zur k-ten Klasse, indem man folgende n Schritte durchführt:
Setze vor alle Kombinationen der n Elemente zur k-ten Klasse,...

1. ... die eins der Elemente von 1 bis n als Anfangselement besitzen (alle) das Element 1,

2. ... die eins der Elemente von 2 bis n als Anfangselement besitzen das Element 2,

3. ... die eins der Elemente von 3 bis n als Anfangselement besitzen das Element 3,

...

n. ... die eins der Elemente von n bis n als Anfangselement besitzen das Element n.

So werden alle möglichen Kombinationen der n Elemente zur k+1-ten Klasse erzeugt, und zwar die Kombination

$$ij_1j_2\dots j_k$$

im i-ten Schritt. Ferner wird keine Kombination zur k+1-ten Klasse doppelt erzeugt, denn die Kombinationen zur k-ten Klasse sind n.Vor. alle verschieden, so daß alle im i-ten Schritt erzeugten Kombinationen sich untereinander im hinteren Teil und die in unterschiedlichen Schritten erzeugten Kombinationen sich im ersten Element unterscheiden.
Weiter sieht man leicht ein, daß im i-ten Schritt genau $C^{(k)}_{W_{n-i+1}}$ Kombinationen zur k+1-ten Klasse erzeugt werden, folglich beträgt ihre Gesamtzahl:

$$\begin{aligned}
C^{(k+1)}_{W_n} &= \sum_{i=1}^{n} C^{(k)}_{W_{n-i+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} C^{(k)}_{W_i} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \binom{i+k-1}{k} \\
&\overset{\text{Vorberlegung}}{=} \binom{n+k}{k+1} \\
&= \binom{n+(k+1)-1}{k+1}
\end{aligned}$$

Anwendungen:

1. Wieviele verschiedene Würfe gibt es mit vier Würfeln? (Aus 6 Elementen (Augenzahlen) greife ich 4 (unter Umständen identische) heraus).

2. Fußballtoto unabhängig von der Reihenfolge der Spiele. Kombinationen von 3 Elementen (0,1 und 2) zur 9. Klasse mit Wiederholung.

Die folgende Tabelle faßt die Ergebnisse dieses Abschnittes noch einmal zusammen (vgl. [SG94], S. 134):

	Zusammenstellung aller betrachteten Elemente	Zusammenstellung eines Teils der betrachteten Elemente	
	Berücksichtigung der Anordnung		Vernachlässigung der Anordnung
	Permutationen	**Variationen**	**Kombinationen**
alle Elemente voneinander verschieden	$P_n = n!$	$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$
mit Wiederholung	$P_k^{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ $= \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots k_n!}$	$V_{W_n}^{(k)} = n^k$	$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$

4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Zu Grunde liegen die Abschnitte 2 und 3 aus [SG94].

4.1 Potenzen und Wurzeln

Definition 4.1 *Sei $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$. Man definiert:*

$$a^n := \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} a & , \quad a \neq 0 \\ 0 & , \quad a = 0 \end{cases}$$

a heißt Basis, n Exponent und $b = a^n$ Potenzwert.

Definition 4.2 *Sei $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Man definiert:*

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}_0$. Es gelten folgende Rechenregeln, die man mittels vollständiger Induktion beweisen kann:

(R1) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(R2) $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$, $b \neq 0$

(R3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(R4) $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$, $n \geq m$

(R5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Bemerkung:
(R1)-(R5) gelten sinngemäß auch für $n, m \in \mathbb{Z}$, worauf darauf zu achten ist, daß evtl. auftretende Nenner immer ungleich 0 sein müssen.
Beispiele: wie in [SG94], S. 34.

Definition 4.3 *Sei $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}, n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $b^n = a$ hat in $\mathbb{R}$ genau eine nichtnegative Lösung (der Beweis ist nicht leicht, s. z.B. [Heu90], S. 77), die wir mit*

$$b = \sqrt[n]{a}$$

bezeichnen. a heißt Radikand, n Wurzelexponent und b der Wurzelwert. Merke Radikand und Wurzelwert sind immer nichtnegativ (zur Begründung siehe [SG94], S. 35)!

Bemerkung:
Definiert man zunächst für $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$ und anschließend für $a \neq 0$

$$a^{\frac{-m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

so ergibt sich wiederum die Gültigkeit von (R1)-(R5) auch für rationale Exponenten (achte jeweils auf Nenner ungleich 0). Diese Gültigkeit bleibt erhalten, wenn man auch beliebige reelle Exponenten zuläst, wobei die Potenzen dann für irrationale Exponenten z.B. durch Intervallschachtelungen definiert werden können.
Wir fassen zusammen: Für $a, b \in \mathbb{R}^{>0}, m, n \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}$
2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m = a^{\frac{m}{n}}, n > 0$
3. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$
4. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$
5. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$

Aufgaben: [SG94] S. 40ff (z.B. Nr. 1.1 a), 1.2 c), 1.3 c), 2.1 d), 2.2 d), 2.3 d), 3.1 d), 3.2 d), 3.4 c),d), 5.1 a),b), 5.2. d), 7.4. b),d), 8.1-8.6 jeweils d))

4.2 Logarithmen

Definition 4.4 *Seien $a \in \mathbb{R}^{>0}, b \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$*
Man definiert:

$$c = log_b a \Leftrightarrow c \text{ ist die eindeutige Lösung von } b^c = a$$

Der Logarithmus von a zur Basis b (auch: b-Logarithmus von a) ist also diejenige Zahl, mit der ich b potenzieren muß um a zu erhalten. Es gilt also per definitionem

$$b^{log_b a} = a$$

und

$$log_b b^c = c$$

Aus der zweiten Beziehung folgt unmittelbar für $c = 0$ bzw. $c = 1$:

$$log_b 1 = 0\,,\ log_b b = 1$$

Der Logarithmus zur Basis 10 heißt dekadischer Logarithmus, der zur Basis e (Euler'sche Zahl e=2,71828...) heißt natürlicher Logarithmus (i.Z. ln).
Merke: Basis und Argument des Logarithmus sind immer nichtnegativ.

Beispiele wie in [SG94] S.45.

Satz 4.5 *Für den Logarithmus zur Basis b gelten folgende Rechenregeln* $(c, d, x > 0)$*:*

(R1) $log_b(c \cdot d) = log_b c + log_b d$

(R2) $log_b(\frac{c}{d}) = log_b c - log_b d$

(R3) $log_b x^a = a \cdot log_b x, a \in \mathbb{R}$

(R4) $log_{b_2} x = log_{b_1} x \cdot log_{b_2} b_1 \Leftrightarrow log_{b_1} x = \dfrac{log_{b_2} x}{log_{b_2} b_1}$

Die letzte Regel gibt zum einen an, wie man einen Logarithmus von einer Basis b_1 *in eine andere Basis umrechnet und erlaubt zum anderen die Berechnung von Logarithmen zu einer beliebigen Bais* b_1*, falls man nur die Logarithmen zu einer festen Basis* b_2 *(etwa 10 oder e) vollständig kennt.*

Beweis:
(R1-3): b mit rechter Seite potenzieren und ausrechnen. Es muß sich jeweils das Argument der linken Seite ergeben.
(R4): b_2 mit rechter Seite potenzieren und x erhalten.
Aufgaben: [SG94], S. 49ff (z.B. Nr. 1.1 a),d), 1.2 c),d), 1.3 c), 1.4 c), 1.7 c),d), 2.1 d), 2.2 c),d), 2.3 c),d), 2.4 c),d), 2.5 d), 2.6 d), 2.7 d), 3.1 c),d), 3.2, c),d), 3.3 c),d))

5 Einführung in die komplexen Zahlen

5.1 Zwei Grundbegriffe aus der Algebra: Gruppe und Körper

Bekanntlich gelten für den Umgang mit bestimmten mathematischen Objekten gewisse Gesetze (wie etwa Rechengesetze für Zahlenmengen). Man kann nun von dem konkreten mathematischen Objekt abstrahieren und nur noch die Struktur der Gesetze beim Umgang mit gewissen Mengen kennzeichnen. Bestimmte Strukturen treten dabei besonders häufig auf und haben daher besondere Namen bekommen:

Definition 5.1 (Gruppe) *Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und*

$$\oplus : M \times M \mapsto M$$

eine Abbildung, die je zwei Elementen aus $m_1, m_2 \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element $m_1 \oplus m_2$ zuordnet. Wenn dann die Gesetze

- *Assoziativgesetz*

$$\forall a, b, c \in M \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

- *Existenz eines Neutralelements*

$$\exists e \in M \forall a \in M \quad e \oplus a = a = a \oplus e$$

- *Existenz inverser Elemente*

$$\forall a \in M \exists (-a) \in M \quad a \oplus (-a) = e = (-a) \oplus a$$

gelten, so heißt $(M, \oplus)$ eine Gruppe. Gilt zusätzlich noch das Kommutativgesetz

$$\forall a, b \in M \quad a \oplus b = b \oplus a\,,$$

so heißt $(M, \oplus)$ eine kommutative oder abelsche Gruppe.

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +), (S_n, \circ)$, also die natürlichen Zahlen und die „symmetrische Gruppe“ der Permutationen von $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$.

Definition 5.2 (Körper) *Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und*

$$\oplus : M \times M \mapsto M\,,\ \odot : M \times M \mapsto M$$

Abbildungen. Wenn dann die Zusammenhänge

- *$(M, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralelement 0_M.*
- *$(M \setminus \{0_M\}, \odot)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralelement $1_M \neq 0_M$.*
- *Distributivgesetz*

$$\forall a, b, c \in M \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

gelten, so heißt $(M, \oplus, \odot)$ ein Körper

Bemerkung: Die Körpergesetze stellen sicher, daß man mit den Objekten aus M nach „gewohnter" Art rechnen kann.
Beispiele: Körper nur aus 0 und 1 (Die Verknüpfungstafeln ergeben sich aus den Körperaxiomen). Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Die Zahlenmengen, die wir bisher kennengelernt haben($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$), zeichnen sich durch verschiedene Eigenschaften und Strukturen aus ($(\mathbb{N}_0, +)$ ist eine abelsche Halbgruppe, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein sogenannter Ring, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper). Allen gemeinsam ist eine gewisse Anordnungseigenschaft (daß man also von unterschiedlichen Elementen immer sagen kann, welches kleiner und welches größer ist). Die natürlichen Zahlen besitzen außerdem eine Wohlordnungseigenschaft (Jede nichtleere Teilmenge dieser Menge besitzt ein kleinstes Element, bei den ganzen Zahlen gilt dies nur noch für jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge), die $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ nicht mehr besitzen (Beispiel: $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$). Darüberhinaus ist jeder dieser Zahlenbereiche dadurch gekennzeichnet, daß eine jeweils größere Klasse von Gleichungen in ihm lösbar ist. So sind Gleichungen der Form

$$a + x = b$$

erst in $\mathbb{Z}$ immer lösbar. Gleichungen der Form

$$ax = b\,,\ a \neq 0$$

sind erst in $\mathbb{Q}$ immer lösbar. Schließlich wird eine große Klasse von quadratischen Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

erst in $\mathbb{R}$ lösbar, aber nur, falls die Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

die Bedingung $D \geq 0$ erfüllt (vgl. Abschnitt 2.5). So ist z.B. die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

in $\mathbb{R}$ nicht mehr lösbar, denn es gilt $D = -1$.
Unser Ziel ist es nun, die Menge der reellen Zahlen derart zu erweitern, daß nicht nur Gleichungen dieser Art, sondern beliebige Gleichungen der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$$

(Nullstellen von Polynomen!) lösbar werden.

5.2 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

5.2.1 Historisches

Siehe hierzu auch [Heu90], S. 41. Cardanos Aufgabe von 1545: Zerlege eine Strecke der Länge 10 so in zwei Stücke, daß das aus ihnen gebildete Rechteck den Flächeninhalt 40 hat. Es ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$x(10 - x) = 40 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$$

Formale Rechnung liefert die Lösungen:

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Rechnet man trotz des Wissens darum, daß $\sqrt{-15}$ in $\mathbb{R}$ gar nicht definiert ist, weiter, so gelangt man zu:

$$x_1 + x_2 = 10\,,\ x_1 \cdot x_2 = 40$$

Seit Cardano tauchten immer wieder komplexe (=zusammengesetzte) Ausdrücke der Form

$$a + \sqrt{-b} = a + \sqrt{-1}\sqrt{b} = a + i\sqrt{b}$$

in der Mathematik auf, mit denen man wie mit reellen Zahlen rechnete und lediglich i^2 durch -1 ersetzte. Die Zahl i wird imaginäre Einheit genannt. In der Folge wurden mit den komplexen Zahlen einige bedeutende Resultate erzielt, auf ein mathematisches Fundament, das ihnen das Geheimnisvolle nahm, wurden sie jedoch erst durch C.F. Gauss (1831) und W.R. Hamilton (1837) gestellt.

5.2.2 Definition der komplexen Zahlen

Eine „traditionelle“ komplexe Zahl $a + bi$ ist zusammengesetzt aus den zwei reellen Zahlen a (Realteil) und b (Imaginärteil). Von daher liegt folgende Definition nahe:

Definition und Satz 5.3 *Auf* $\mathbb{R}^2$ *seien die folgenden Operationen definiert* $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$*:*

$$\begin{aligned} + : (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ \cdot : (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *ein Körper, der sogenannte Körper der komplexen Zahlen, den wir mit* $\mathbb{C}$ *bezeichnen. Das Neutralelement der Addition ist (0,0), das der Multiplikation (1,0). Die Elemente der Form (a,0) können mit den reellen Zahlen identifiziert werden. Wir schreiben daher statt (a,0) einfach a. Das Element (0,1) nennen wir i (imaginäre Einheit). Es gilt* $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = bi$*,* $i^2 = i \cdot i = -1$*, sowie* $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$*.* $(a, b) = a + bi$ *und* $(a, -b) = a - bi$ *heißen konjugiert komplexe Zahlen. Zu einer komplexen Zahl* z *bezeichnen wir die konjugiert komplexe Zahl mit* $\overline{z}$*. Zu* $z = a + bi$ *heißt a Realteil (i.Z. a=Re(z)), b Imaginärteil (i.Z. b=Im(z)) und* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *der Betrag von* z*.*

Beweis: nachrechnen!
Bemerkung: $\mathbb{C}$ läßt sich nicht zu einem angeordneten Körper machen.
Führt man ein kartesisches Koordinatensystem ein, so kann man jede komplexe Zahl mit einem Punkt der Zeichenebene identifizieren, man spricht daher auch von der komplexen oder Gaußschen Zahlenebene. Die Achsen werden als reelle bzw. imaginäre Achse bezeichnet. Die Addition zweier komplexer Zahlen kann veranschaulicht werden als Vektoraddition in der Zahlenebene. Ein Punkt P der Zahlenebene ist auch durch Angabe seiner Polarkoordinaten, also des Abstandes r vom Ursprung O und der Angabe des Winkels ϕ, den OP mit der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn einschließt, eindeutig beschrieben. Ist $z = a + ib$, so gilt für r und ϕ

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & , \quad a > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a} & , \quad a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad a = 0, b > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & , \quad a = 0, b < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ϕ heißt auch Argument von z (i.Z. $\phi = \arg(z)$). Es ist bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.
Dies führt auf die sogenannte Polardarstellung der komplexen Zahlen:

$$z = a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi) = r \cdot e^{i\phi}\,,$$

wobei $e^{i\phi}$ zunächst nur ein abkürzendes Symbol darstellt (den Zusammenhang von Sinus und Kosinus mit der komplexen Exponentialfunktion liefert erst die Eulersche Formel). Mit Hilfe der Polardarstellung läßt sich die Multiplikation in der Zahlenebene darstellen:

$$\begin{aligned}
(r_1 \cdot e^{i\phi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\phi_2}) &= r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\
&= r_1 \cdot r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)) \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)}
\end{aligned}$$

Merke: Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.
Einschub: In der vorangegangenen Rechnung wurden die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen benutzt, auf die wir im folgenden für einen Spezialfall kurz eingehen werden:

Satz 5.4 *Seien $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Wir beweisen nur die erste Beziehung. Zeichne ein Dreieck ΔABC und zeichne die Höhe $h_c =: h$ ein. Der von $\overline{CA}$ und h eingeschlossene Winkel sei α, der von $\overline{CB}$ und h eingeschlossene Winkel sei β. Bezeichne weiter den Höhenfußpunkt mit F und es sei $p := |\overline{AF}|$,$q := |\overline{BF}|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{p}{b} \\
\cos\alpha &= \frac{h}{b} \\
\sin\beta &= \frac{q}{a} \\
\cos\beta &= \frac{h}{a}
\end{aligned}$$

Nach dem Sinussatz ist nun:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{c}{a} = \frac{p + q}{a}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{h}{b}\cdot\frac{p+q}{a} \\
&= \frac{h}{b}\cdot\frac{p}{a}+\frac{h}{b}\cdot\frac{q}{a} \\
&= \frac{p}{b}\cdot\frac{h}{a}+\frac{h}{b}\cdot\frac{q}{a} \\
&= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Diese Additionstheoreme gelten auch für allgemeine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, werden dann allerdings auf anderem Wege bewiesen.

Satz 5.5 (Eigenschaften der komplexen Zahlen) *Seien* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

1.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1+z_2} &= \overline{z_1}+\overline{z_2} \\
\overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \\
\overline{\overline{z}} &= z \\
z=\overline{z} &\Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \\
arg\ (\overline{z}) &= -arg\ z
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
Re(z) &= \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \\
Im(z) &= \frac{-i}{2}(z-\overline{z})
\end{aligned}$$

3.

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$$

4.

$$\begin{aligned}
Re(z) &\leq |z| \\
Im(z) &\leq |z|
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
|z|=0 &\Leftrightarrow z=0 \quad \textit{Definitheit} \\
|z_1\cdot z_2| &= |z_1|\cdot|z_2| \quad \textit{Homogenität} \\
|z_1+z_2| &\leq |z_1|+|z_2| \quad \textit{Dreiecksungleichung}
\end{aligned}$$

Beweis: Man rechnet alle Eigenschaften leicht nach. Bei der Dreiecksungleichung für den Betrag muß man die Minkowskische Ungleichung verwenden.

Folgerung 5.6 *Sei*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0\,,\ a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \ldots, n\,,\ n \in \mathbb{N}$$

ein komplexwertiges Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann gilt:

$$f(z_0) = 0 \Rightarrow f(\overline{z_0}) = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} &= \overline{f(z_0)} \\ &= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z_0}^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k \\ &= f(\overline{z_0}) \end{aligned}$$

Bei der Division zweier komplexer Zahlen z_1, z_2 geht man wie folgt vor:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Beispiel: $\frac{1+i}{3+4i}$

In $\mathbb{C}$ gilt der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra:

Satz 5.7 *Jedes komplexe Polynom der Form*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0\,,\ a_k \in \mathbb{C}, k = 0, \ldots, n\,,\ n \in \mathbb{N}$$

hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle (und zerfällt damit völlig in Linearfaktoren).

Damit wurde das gesteckte Ziel, den Zahlenbereich so zu erweitern, daß sämtliche Gleichungen vom Typ

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0\,,\ a_k \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

lösbar werden, erreicht.
Aufgaben:
[SG94], S.79f Nr. 1.1 (Nur Beträge berechnen) , 1.2 a),b),d), 2.2 a),b),c),d), 3.1 a),b),c),d) 3.2 a),b),c),d), 3.3.2 und 3.3.3
Berechne alle ganzzahligen Potenzen von i
Gib zu folgenden Quotienten z von komplexen Zahlen Re(z), Im(z), r, $\phi, \overline{z}$. an:

1. $\frac{1}{1+i}$
2. $\frac{1+i}{1-i}$

Löse $x^4 = -1$ in $\mathbb{C}$.

6 Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Aufgabenstellung:
Gegeben sind eine natürliche Zahl m (Anzahl der Gleichungen), eine weitere natürliche Zahl n (Anzahl der Unbekannten), $m \cdot n$ (reelle oder komplexe) Zahlen $a_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ (Koeffizienten) und weitere m Zahlen $b_1, \ldots, b_m$ (rechte Seiten). Gesucht sind dann, falls existent, alle n-tupel $(y_1, \ldots, y_n)$ von Zahlen, so daß sich bei Einsetzen von $y = (y_1, \ldots, y_n)$ für $(x_1, \ldots, x_n)$ in das System

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
\ldots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

eine wahre Aussage ergibt. Ein solches n-Tupel $y = (y_1, \ldots, y_n)$ heißt dann Lösung des obigen linearen Gleichungssystems.
Wir werden zunächst Beispiele für einige einfache Spezialfälle betrachten, bevor wir den allgemeinen Fall in Angriff nehmen.

1. Eine Gleichung mit einer Unbekannten:

   Betrachte etwa 2x=6

   Eindeutigkeit der Lösung: Nehmen wir an, es existiert eine Lösung x. Dann gilt

   $$\begin{aligned}
   2x &= 6 \quad | : 2 \\
   \Rightarrow x &= 3
   \end{aligned}$$

   Existenz einer Lösung: Man bestätigt durch Einsetzen (Probe), daß tatsächlich 3 eine Lösung ist.

2. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

   $$\begin{aligned}
   (1) \quad x_1 + x_2 &= 5 \\
   (2) \quad 2x_1 - x_2 &= 1
   \end{aligned}$$

Addition von (1) und (2) liefert:

$$\begin{aligned} 3x_1 &= 6 \\ \Rightarrow \quad x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Einsetzen in (1) führt auf $x_2 = 3$. Wenn es also eine Lösung gibt, so ist $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Wiederum bestätigt man die Existenz einer Lösung durch die Probe.

3. Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ (2) \quad -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Addition von (1) und (2) liefert 0=1 (Widerspruch, also keine Lösung)

Betrachte nun:

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ (2) \quad -x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Jetzt führt Addition von (1) und (2) auf 0=0 (Man kann also etwa x_2, x_3 beliebig wählen und bestätigt durch Einsetzen, daß dann $(1 + x_2 - x_3, x_2, x_3)$ eine Lösung des Gleichungssystems ist.)

4. Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \quad (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad (2) \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Wir übernehmen die erste Gleichung als (4) und erhalten zwei neue Gleichung (5),(6) durch (1)+(2)+(3) bzw. (2)+(3):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \quad (4) \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \quad (5) \\ 0 &= 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Folgerung: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. Wähle also x_2, x_3 frei, dann sind alle Tripel der Form $(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3)$ Lösung von (4),(5),(6), aber nicht unbedingt von (1),(2),(3) (Beispiel: $(1/3, 1/3, 1/3)$).

Das letzte Beispiel legt nahe, nur solche Umformungen von Gleichungssystemen zuzulassen, die die Lösungsmenge nicht verändern; solche Umformungen heißen elementare Umformungen.

Satz 6.1 *Die folgenden drei Operationen sind elementare Umformungen, das heißt, durch ihre Anwendung wird die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht verändert:*

- *Vertauschung von zwei Gleichungen*
- *Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl* $\neq 0$
- *Ersetzen einer Gleichung durch die Summe dieser Gleichung mit dem Produkt einer Zahl und einer anderen Gleichung. Die anderen Gleichungen werden beibehalten.*

Beweis: Jede der Umformungen läßt sich rückgängig machen. Sei (I) jeweils das System von Gleichungen vor der Umformung und (II) das System nach der Umformung. Offenbar gilt zunächst bei jeder der Umformungen: Wenn y eine Lösung von (I) ist, so ist y auch eine Lösung von (II) (Gleichungen werden nicht falsch, wenn ich sie vertausche, mit einer Zahl oder einem beliebigen Vielfachen einer anderen Gleichung addiere.)
Ist umgekehrt y eine Lösung von (II), und etwa aus (I) durch Vertauschung der ersten und zweiten Zeile entstanden, so ist nach nochmaliger Vertauschung der ersten und zweiten Zeile y Lösung des dann entstandenen Gleichungssystems (III)=(I). Analog gilt, wenn y eine Lösung von (II) ist und (II) aus (I) durch Multiplikation z.B. der 1. Gleichung mit $c \neq 0$ entstanden ist, daß y auch Lösung des Gleichungssystems (III) ist, das aus (II) durch Multiplikation mit $1/c$ entsteht. Wiederum ist (III)=(I). Ist schließlich das Gleichungssystem (I) der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i \, , \; 1 \leq i \leq m$$

ersetzt worden durch das Gleichungssystem (II)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(a_{1,j} + ca_{2,j})x_j &= b_1 + cb_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j &= b_i \, , \; 2 \leq i \leq m \end{aligned}$$

und y löst (II), so löst y auch (III):

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}((a_{1,j}+ca_{2,j})+(-c)a_{2,j})x_j &= (b_1+cb_2)+(-c)b_2\\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j &= b_i\,,\ 2\le i\le m\end{aligned}$$

Auch hier ist aber (III)=(I).
Diese Umformungen sind ausreichend, um jedes lineare Gleichungssystem behandeln zu können, wie der folgende Satz zeigt:

Bemerkung 6.2 *Durch elementare Umformungen läßt sich jedes lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j = b_i\,,\ 1\le i\le m$$

in die Form:

$$\begin{aligned}c_{1,r_1}x_{r_1}+c_{1,r_1+1}x_{r_1+1}+\ldots+c_{1,n}x_n &= d_1\\ c_{2,r_2}x_{r_2}+\ldots+c_{2,n}x_n &= d_2\\ \ldots\\ c_{k,r_k}x_{r_k}+\ldots+c_{k,n}x_n &= d_k\\ 0 &= d_{k+1}\\ &\ldots\\ 0 &= d_m\end{aligned}$$

mit $c_{j,r_j}\neq 0$ *überführen (Dreiecksgestalt).*

7 Matrizen

Definition 7.1 *Sei M eine nichtleere Menge. Eine $m \times n$-Matrix ist eine Anordnung von $m \cdot n$ Elementen aus M in einem rechteckigen Schema mit m Zeilen und n Spalten. Schreibweise:*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Die Menge der $m \times n$-Matrizen bezeichnet man auch mit $M^{m \times n}$ oder $M^{m,n}$. Gebräuchlich für M ist vor allem $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (reelle bzw. komplexe Matrizen). Im folgenden werden wir der Einfachheit halber reelle Matrizen betrachten.

Ein lineares Gleichungssystem läßt sich auch abkürzend als Matrix schreiben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n} & b_{m-1} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Aufgabe:
Bringe in Dreiecksgestalt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & a+1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 3 & -3a+12 \\ -3 & -3 & 3 & 3 & -3a-3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -3a \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & -3a-12 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -3a-3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -3a \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & -3a-12 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -9a+6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -9a+12 \end{array}\right)$$

Man führt folgende Rechenoperationen mit Matrizen ein:
Multiplikation: Sei $A = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{m,l}$ und $B = (b_{k,j}) \in \mathbb{R}^{l,n}$ Dann definiert man das Produkt $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ zu

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{l,1} & \dots & b_{l,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} b_{k,j} \, , \, 1 \leq i \leq m \, , \, 1 \leq j \leq n$$

Merke: Anzahl der Spalten von A= Anzahl der Zeilen von B, damit $C = A \cdot B$ definiert ist. C hat die Zeilenzahl von A und die Spaltenzahl von B.

Beispiele:

1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 17 \\ 14 & 8 & 10 \\ 13 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist Bsp. 2 ein Teil von Bsp. 1, allgemein hat man, wenn A m Zeilen hat und etwa $b_i, i = 1, 2, 3, 4$ Spaltenvektoren der Länge n sind:

$$A \cdot (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4) = (Ab_1 \quad Ab_2 \quad Ab_3 \quad Ab_4)$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?$$

$$n = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n=3: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n=4: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vermutung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & (\frac{1}{2}n(n-1)) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis:[induktiv]

n=1: klar

$n \mapsto n+1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n & (\frac{1}{2}n(n-1)) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n+\frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{1}{2}n\overbrace{(2+(n-1))}^{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation:

- Sie ist assoziativ. Ist nämlich A eine (k,l)-Matrix, B eine (l,m)-Matrix und C eine (m,n)-Matrix, so ist zu zeigen:

$$D := (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) =: F$$

Es gilt aber:

$$d_{r,s} = \sum_{u=1}^{m} (AB)_{r,u} \cdot c_{u,s} = \sum_{u=1}^{m} \left(\sum_{v=1}^{l} a_{r,v} \cdot b_{v,u} \right) \cdot c_{u,s}$$

und

$$f_{r,s} = \sum_{w=1}^{l} a_{r,w} \cdot \left(\sum_{y=1}^{m} b_{w,y} \cdot c_{y,s} \right)$$

Durch Umsummieren folgt die Behauptung.

- Sie ist nicht kommutativ. Kommutativität käme, wenn überhaupt, nur für quadratische Matrizen in Frage (sonst hätten $A \cdot B$ und $B \cdot A$, falls überhaupt definiert, unterschiedliches Format). Es ist aber z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (Nullmatrix)}$$

jedoch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sie ist nicht nullteilerfrei. Es gilt zwar für jede Matrix A, daß $A \cdot 0 = 0$, aber nicht $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ (siehe Beispiel zur Kommutativität)

- Einheitsmatrix. Eine quadratische Matrix der Form

$$E = \begin{pmatrix} & 1 & 0 & 0 & \ldots\ 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ & & 0 & 1 & 0 \\ 0\ \ldots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Einheitsmatrix. Für alle quadratischen Matrizen gilt: $A \cdot E = A = E \cdot A$.

- Inverse Matrix (Es werden in diesem Abschnitt nur quadratische Matrizen betrachtet).

  Definition: Gibt es zur Matrix A eine Matrix B mit $A \cdot B = E = B \cdot A$, dann heißt B inverse Matrix zu A (i.Z. $B = A^{-1}$). A heißt in dem Fall regulär.

  Satz 7.2 *Gibt es zu A Matrizen B und C mit $B \cdot A = E$ und $A \cdot C = E$, dann gilt B=C.*

  Beweis:

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C$$

  Folgerung 7.3 *A hat höchstens eine inverse Matrix.*

  Beweis:[indirekt]
  Annahme: Es gibt 2 inverse Matrizen B,C mit $B \neq C$, dann gilt:

$$BA = E\,,\ AB = E\,,\ CA = E\,,\ AC = E$$

  Mit dem vorangegangenen Satz folgt B=C.

Beispiele:

1. Inverse Matrix zu E

   Es ist nach Def. d. inversen Matrix

$$E^{-1} \cdot E = E$$

   und nach Definition der Einheitsmatrix

$$E \cdot E = E$$

   Nach der Eindeutigkeit der inversen Matrix folgt:

$$E^{-1} = E$$

2. Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

führt auf

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält also das folgende Gleichungssystem für e,f,g,h (je zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten):

$$\begin{aligned} (1) ae + bg &= 1 \\ (2) ce + dg &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (3) af + bh &= 0 \\ (4) cf + dh &= 1 \end{aligned}$$

Lösung (multipliziere (1) mit c, (2) mit a und subtrahiere dann (2) von (1) etc., analoges Vorgehen für (3) und (4)):

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Satz 7.4 *Ist A^{-1} die inverse Matrix zu A, so gilt:*

a) *A^{-1} ist invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$*

b) *Sind A,B invertierbar, dann ist auch $A \cdot B$ invertierbar mit*

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

c) *Die Inverse einer Matrix läst sich mit Hilfe des Gauß-Algorithmus berechnen.*

Beweis:
Zu a): Rechne nach, daß A die Eigenschaft einer Inversen zu A^{-1} besitzt, aus der Eindeutigkeit der Inversen folgt dann die Behauptung.
Zu b): Rechne nach, daß $B^{-1} \cdot A^{-1}$ die Eigenschaften einer Inversen zu AB besitzt, auch hier folgt dann die Beh. aus der Eindeutigkeit der Inversen.
Zu c): Gesucht ist B mit

$$\begin{aligned} AB &= E \\ \Rightarrow A \cdot (b_1 \quad b_2 \ldots b_n) &= (e_1 \quad e_2 \ldots e_n)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$(e_i)_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = i \\ 0 & , \quad k \neq i \end{cases}$$

Löse also:

$$\begin{aligned} Ax_1 = e_1 \quad &\Rightarrow \quad b_1 = x_1 \\ Ax_2 = e_2 \quad &\Rightarrow \quad b_2 = x_2 \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Beispiele:

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bezeichnet man die Inverse mit X, so gilt: AX=E, d.h.

$$A \cdot (x_1 \quad x_2 \quad x_3) = (e_1 \quad e_2 \quad e_3)$$

löse also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \text{ und } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \text{ und } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Zusammengefaßt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Die rechte Hälfte des Schemas ist nun genau A^{-1}.

2.
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier liefert das Verfahren:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Die rechte Hälfte des Schemas ist genau B^{-1}.

3. Gesucht ist eine Matrix C mit

$$A \cdot C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
C &= A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Weitere Rechenoperationen mit Matrizen sind:
Addition von Matrizen ($A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$):

$$
A{+}B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}
$$

Skalarmultiplikation:

$$
\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \lambda a_{m,1} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}
$$

Man überprüft leicht die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= A+(B+C) \\
A+B &= B+A \\
A+0 &= A \\
A+(-A) &= 0
\end{aligned}$$

also: $(\mathbb{R}^{m,n},+)$ ist eine abelsche Gruppe. Darüberhinaus gilt:

$$\begin{aligned}
(\lambda\mu)A &= \lambda(\mu A) \\
1\cdot A &= A \\
(\lambda+\mu)\cdot A &= \lambda A+\mu A \\
\lambda(A+B) &= \lambda A+\lambda B
\end{aligned}$$

Es folgt, daß Matrizen gleicher Gestalt einen Vektorraum bilden.
Zusammenhang zwischen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned}
A\cdot(B+C) &= A\cdot B+A\cdot C \\
(B+C)\cdot A &= B\cdot A+C\cdot A
\end{aligned}$$

Betrachte nun ein Gleichungssystem mit rechter Seite identisch 0 (ein sogenanntes homogenes System) der Form:

$$Ax=0$$

sowie ein dazugehöriges inhomogenes System:

$$Ax=b$$

Satz 7.5 *Ist y_1 eine Lösung von Ax=b, dann gilt: y ist Lösung von Ax=b genau dann, wenn $y-y_1$ eine Lösung von Ax=0 ist (d.h. man erhält die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems indem man zu einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems addiert).*

Beweis:
$\Rightarrow$:
Seien y, y_1 Lösungen von Ax=b (also $Ay=b=Ay_1$). Dann folgt:

$$A(y-y_1)=Ay-Ay_1=b-b=0\,,$$

also löst $(y - y_1)$ das homogene System.
$\Longleftarrow$:
Sei $y - y_1 =: y_2$ Lösung von $Ax = 0$, es gelte also $Ay_2 = 0$. Dann folgt:

$$Ay = A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2 = b + 0 = b\,,$$

also löst y das inhomogene System.

Bemerkung 7.6 *Ein homogenes System hat immer 0 als Lösung. Nach dem letzten Satz hat also das inhomogene System genau dann höchstens eine Lösung, wenn das homogene System nur die triviale Lösung besitzt.*

8 Kleine Knobeleien zur Auflockerung

Aufgabe 1:
Auf der Dreidörferinsel gab es drei Dörfer. Ein Dorf hieß Wahrheit, das zweite Unwahrheit und das dritte Halbwahrheit. Verständlicherweise sprachen die Einwohner des ersten Dorfes stets die Wahrheit, die des zweiten Dorfes stets die Unwahrheit und die des dritten Dorfes abwechselnd die Wahrheit und die Unwahrheit, und zwar konnte ihre erste Antwort sowohl wahr als auch falsch sein.
Der Logiker traf gleichzeitig fünf Inselbewohner: Schielauge, Bart, Stubsnase, Pausbacke und Langohr. Um herauszubekommen, wer aus aus welchem Dorf stammt, bat der Logiker die ersten beiden der Reihe nach zu erzählen, wer in welchem Dorf wohnt. Schielauge antwortete, daß Bart ein Halbwahrer, Stubsnase ein Wahrer, Pausbacke ein Halbwahrer und Langohr ein Unwahrer ist. Bart antwortete, daß Schielauge ein Halbwahrer, Stubsnase ein Unwahrer, Pausbacke ein Wahrer und Langohr ein Halbwahrer ist. Aus diesen Antworten konnte der Logiker feststellen, wer der fünf Inselbewohner in welchem Dorf wohnt.
Welche Überlegungen stellte er an?

Aufgabe 2:
Ein Nomade versprach in seinem Testament seinen drei Söhnen folgende Anteile seiner Kamelherde: Dem ältesten die Hälfte aller Kamele, dem mittleren ein Drittel und dem jüngsten ein Neuntel der Herde. Als er starb, hinterließ er 17 Kamele. Seine Söhne überlegten lange, wie sie die Herde entsprechend dem Testament unter sich aufteilen könnten.
Da kam ein Wanderer auf einem alten, schwachen Kamel des Weges und sagte: „Ich gebe euch noch mein Kamel, und dann versucht noch einmal zu teilen.“Das Teilen brachte nun keine Probleme mehr. Der älteste Sohn erhielt 9 (die Hälfte), der zweite 6 (ein Drittel) und der jüngste Sohn 2 (ein Neuntel) Kamele. Die Brüder waren zufrieden; der Wanderer auch, denn ein kräftiges, wohlgenährtes Kamel blieb übrig, welches er sich nahm und seinen Weg fortsetzte.
Wie war die Teilung möglich?

Aufgabe 3:
Was ist falsch an folgendem Beweis?
Wir beweisen durch vollständige Induktion, daß alle Katzen die gleiche Augenfarbe haben:

Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen jetzt an, daß je n Katzen die gleiche Augenfarbe haben, und beweisen, daß das auch für je $n+1$ Katzen gilt. Wir nehmen $n+1$ willkürlich ausgewählte Katzen und numerieren sie. Nach Induktionsvoraussetzung haben die Katzen mit den Nummern 1 bis n die gleiche Augenfarbe, und auch die n Katzen mit den Nummern 2 bis $n+1$. Zu beiden Mengen gehört z.B. die Katze Nr. 2, also haben alle $n+1$ Katzen die gleiche Augenfarbe.

Aufgabe 4:
Ein Lastwagen hat $1t$ Erdbeeren mit 99 (Masse-)Prozent Wassergehalt geladen. An der Grenze wird er aufgehalten, so daß bei der Weiterfahrt der Wassergehalt durch Verdunstung auf 98 Prozent gesunken ist.
Wieviel wiegen die Erdbeeren jetzt?

Aufgabe 5:
Unter 12 Münzen befindet sich eine falsche. Finde mit drei Wägungen auf einer Balkenwaage heraus, welche der 12 Münzen falsch ist und ob sie leichter oder schwerer ist!

Aufgabe 6:

a) Ordne fünf Streichhölzer so an, daß zwei gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge 1 Streichholz entstehen.

b) Ordne sechs Streichhölzer so an, daß vier gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge 1 Streichholz entstehen.

Aufgabe 7:
Drei Läufer A, B, C trainieren systematisch auf der $200-$Meter-Strecke. Nach jedem Lauf notieren sie die Reihenfolge, in der sie das Ziel passieren. Am Ende der Saison stellen sie fest, daß A in den meisten Trainingsläufen B geschlagen hat, daß B meistens C besiegt hat und daß in den meisten Läufen C vor A lag.
Wie ist das möglich?

Aufgabe 8:
Fünf Piraten finden einen Schatz von 1000 Goldmünzen. Innerhalb der Piraten gibt es eine festgelegte Rangfolge (Kapitän, 1. Offizier, 2. Offizier, Steuermann, Küchenjunge), so daß der Kapitän prinzipiell über die Beuteverteilung

entscheiden kann, allerdings muß er dies so tun, daß mindestens die Hälfte aller Piraten seinem Vorschlag zustimmt. Ansonsten kommt es zur Meuterei, der Kapitän wird in einem der Beiboote ausgesetzt, alle übrigen Piraten rücken einen Rang nach oben und der neue Kapitän macht einen Verteilungsvorschlag usw..
Wie entscheidet sich der Kapitän der fünf Piraten, um seinen Gewinn zu maximieren und trotzdem nicht im Beiboot zu landen?

Aufgabe 9:
In einem gewöhnlichen Zimmer befindet sich eine Glühbirne an der Decke. In einem anderen Zimmer, von dem aus man das erste Zimmer nicht einsehen kann, befinden sich drei Lichtschalter an der Wand (zu Beginn alle ausgeschaltet), von denen genau einer die Glühbirne im ersten Zimmer betätigt (die anderen beiden sind Attrappen). Sie befinden sich im zweiten Zimmer, dürfen dort jeden der Schalter nach Belieben betätigen, müssen aber irgendwann in das erste Zimmer hinübergehen und entscheiden, welcher der drei Schalter mit der Glühbirne verbunden ist!

Aufgabe 10:

a) Man nehme eine Blatt Papier der Dicke $0,1$ mm und falte es 40 mal. Welche Dicke hätte es dann?
   Wie oft müßte man es falten, um einen Papierstapel von der Erde bis zur Sonne (8 Lichtminuten, Lichtgeschwindigkeit 300000 km pro Sekunde) zu erhalten?

b) Die französische Gräfin Elisabeth-Angélique de Beautéville verwitwete im Alter von 20 Jahren. Ihr Gatte, der Gouverneur Sanslisse, liebte sie sehr und hinterließ folgendes Testament: Im ersten Jahr nach seinem Tode wird der Witwe ein Goldstück ausgezahlt, wenn sie nicht wieder heiratet, im zweiten zwei Goldstücke, im dritten vier usw., also in jedem Jahr doppelt so viele Goldstücke wie im Vorjahr, vorausgesetzt sie bleibt unverheiratet. Die Gräfin lebte noch 69 Jahre und heiratete nicht wieder.
   Wieviele Goldstücke hätte sie erhalten müssen?

Aufgabe 11:
Die Erde werde als kugelförmiges Gebilde angesehen. Angenommen, man spannt ein Seil rings um den Äquator (40000 km Umfang), so daß es straff

gespannt überall den Boden berührt. Anschließend verlängert man dieses Seil um einen Meter und zieht das Seil so von der Erde weg, daß es überall den gleichen Abstand von der Erdoberfläche hat.
Kann jetzt eine Maus unter diesem Seil hindurchkriechen?

Aufgabe 12:
Das Königsberger Brückenproblem:
Die Stadt Königsberg liegt zu beiden Seiten eines Flusses und auf zwei Inseln im Fluß. Zur Insel A führen zwei Brücken von jedem Flußufer aus, die Inseln sind durch eine Brücke verbunden, und zur Insel B führt eine Brücke von jedem Flußufer.
Gibt es einen Rundweg über alle Brücken, bei dem jede Brücke genau einmal benutzt wird?

Aufgabe 13:
Ein Fischereimeister wollte feststellen, wie viele fangreife Fische es in einem Teich gab. Zu diesem Zweck warf er ein Netz mit der vorgeschriebenen Maschenweite aus. Beim Einholen des Netzes zählte er dreißig Fische. Er kennzeichnete jeden dieser Fische mit einer Marke und warf dann seinen Fang in den Teich zurück. Am nächsten Tag legte er dasselbe Netz aus und fing vierzig Fische, darunter zwei gekennzeichnete.
Wie konnte er näherungsweise berechnen, wie viele Fische im Teich sind?

Literatur

[Heu90] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1; Teubner, Stuttgart, 1990.

[Kon92] A. H. Konforowitsch: Logischen Katastrophen auf der Spur, Mathematische Sophismen und Paradoxa; Fachbuchverlag, Leipzig, 1992.

[Sch71] K. Schick: Aussagenlogik, Eine leichtverständliche Einführung in elementare Probleme der modernen Logik; Herder, 1971.

[SG94] W. Schäfer, K. Georgi: Mathematik Vorkurs, Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger; Teubner, Stuttgart, 1994.

[RS94] H.-J. Reinhardt, F. Seiffart: Arbeitsmaterialien zur Analysis I+II; Vorlesungsskriptum, Fachbereich Mathematik, Universität-GH Siegen, 1994.