Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 07/08

Blatt 10

1. Seien Ω, S_i, T_i höchstens abzählbar und $X_i : \Omega \to S_i$ unabhängige Zufallsvariable.

   (a) (Vektoren von unabhängigen Zufallsvariablen.) Man beweise für $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$, dass die Vektoren

   $$(X_{i_0+1}, \ldots, X_{i_1}), (X_{i_1+1}, \ldots, X_{i_2}), \ldots, (X_{i_{k-1}+1}, \ldots, X_{i_k})$$

   unabhängig sind. (3)

   (b) (Abbildungen von unabhängigen Zufallsvariablen.) Seien zusätzlich $g_i : S_i \to T_i$ Abbildungen. Man beweise, dass

   $$g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$$

   unabhängige Zufallsvariable sind. (2)

2. (Einfaches Warteschlangenmodell.) Seien $0, 1, \ldots, n$ die Zeitpunkte, an denen ein Skilift, der pro Zeiteinheit eine Person befördern kann, abfährt. Zwischen den Zeitpunkten k und $k+1$ kommen Y_k neue Skifahrer an. Die Y_k seien unabhängig. Die Länge X_n der Warteschlange unmittelbar vor der Abfahrt zur Zeit k bestimmt sich rekursiv durch

   $$X_k = \max(0, X_{k-1} - 1) + Y_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

   $X_0 = x_0$ sei eine bekannte Zahl. Man beweise, dass

   $$P(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k, \ldots, X_0 = x_0) = \\ \begin{cases} P\{Y_k = x_{k+1} - x_k + 1\}, & \\ & \text{falls} \\ P\{Y_k = x_{k+1}\}, & \end{cases} \begin{array}{l} x_k \geq 1, \\ \\ x_k = 0, \end{array}$$

   falls $P(X_0 = x_0, \ldots, X_k = x_k) > 0$. (5)

Abgabetermin: Mo./Di., den 14./15.1.2008, in den Übungen.