Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 08/09

Blatt 1

1. Man zeige, dass für die Gleichverteilung P auf der endlichen Menge Ω Folgendes gilt:
   (i) $P(\emptyset) = 0$. Beachte: $\emptyset + \emptyset = \emptyset$. (1)
   (ii) $\forall A, B \subset \Omega,\ A \subset B : P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Beachte: $B = A + (B \setminus A)$. (1)
   (iii) $\forall A, B \subset \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Beachte: $A \cup B = A + B \setminus (A \cap B)$. (1)
   (iv) $\forall A, B \subset \Omega,\ A \subset B : P(A) \leq P(B)$. (0)
   (v) $\forall A \subset \Omega : P(A^c) = 1 - P(A)$. (1)

2. Der französische Spieler und Hobby–Mathematiker Chevalier de Meré wunderte sich einmal Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit drei Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl beide durch gleichviele 3–fach Kombinationen der Zahlen 1,...,6 erzeugt würden. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augensummen 11 und 12.
   Hinweis: Definiere für das Würfeln mit drei *unterscheidbaren* Würfeln einen geeigneten Grundraum S.
   Kombination (Definition): Sei o.E. $A = \{1, \ldots, n\}$. Die Reihenfolge des Auftretens wird nicht notiert. Zusätzlich werden die aufgetretenen Werte der Größe nach geordnet. Als k–Kombination aus A mit (ohne) Wiederholung bezeichnet man jeden Vektor $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_j \in A$, wobei $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$ $(1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n)$ gilt.
   Die Anzahl der möglichen k–Kombinationen aus A mit (ohne) Wiederholung beträgt $\binom{n+k-1}{k}$ bzw. $\binom{n}{k}$. (4)

3. Der gute Chevalier aus Aufgabe 2 glaubte, mit einem Würfel bei 4 Würfen mindestens eine Sechs zu werfen, habe dieselbe Wahrscheinlichkeit, wie mit 2 Würfeln bei 24 Würfen mindestens eine Doppelsechs zu werfen. Stimmt das?
   (a) Geben Sie für beide Spiele einen Grundraum an.
   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

   Hatte Chevalier de Meré recht?
   Hinweis: Permutation (Definition): Fr eine Menge A gelte $A \neq \emptyset$, $|A| = n$. Als k–Permutation aus A mit (ohne) Wiederholung bezeichnet man jeden Vektor $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_i \in A$ (mit $a_i \neq a_j$, falls $i \neq j$).
   Die Anzahl der möglichen k–Permutationen mit (ohne) Wiederholung beträgt n^k bzw. $k!\binom{n}{k}$. (4)

Abgabetermin: Mo, den 20.10.2008, in der Vorlesung bzw. im Postfach "Kehl"