Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 08/09

Blatt 2

1. Bei der Auslosung der 32 Spiele der ersten Hauptrunde des DFB–Pokals 1986 gab es einen Eklat, als der Loszettel der Stuttgarter Kickers unbemerkt buchstäblich unter den Tisch gefallen und schließlich unter Auslosung des Heimrechts der zuletzt im Lostopf verbliebenen Mannschaft Tennis Borussia Berlin zugeordnet worden war. Auf einen Einspruch der Stuttgarter Kickers hin wurde vom DFB–Bundesgericht die gesamte Auslosung der ersten Hauptrunde neu angesetzt. Kurioserweise ergab sich dabei wiederum die Begegnung Tennis Borussia Berlin – Stuttgarter Kickers.

   (a) Zeigen Sie, dass aus stochastischen Gründen kein Einwand gegen die erste Auslosung besteht.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der zweiten Auslosung erneut die Begegnung Tennis Borussia Berlin – Stuttgarter Kickers ergibt?

   Hinweis: Nummerieren wir alle Mannschaften von 1 bis 64 durch, so ist das Ergebnis einer regulären Auslosung ein Vektor $(a_1, \ldots, a_{64})$, wobei Mannschaft a_{2i-1} gegen Mannschaft a_{2i} Heimrecht hat. (4)

2. Angenommen, die acht Läufer A, B, …, G, H sind alle gleich gut, d.h. der Sieg hängt vom Zufall ab. Sie kämpfen um drei Medaillen (Gold, Silber, Bronze).

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Läufer A, B, C in dieser Reihenfolge die Gold– die Silber– und die Bronzemedaille erhalten?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einem Tipp über die drei Erstplatzierten zwar die richtigen drei besten Läufer benennt, aber in der falschen Reihenfolge?

   aus: Elemente der Mathematik, LK Stochastik, Schroedel, S. 57, Aufg. 6 (4)

3. Sei Ω höchstens abzählbar. Man zeige: die einzige σ–Algebra, die alle Elementarereignisse $\{\omega\}$ für $\omega \in \Omega$ enthält, ist $\mathbb{P}(\Omega)$. (2)

4. (Produkt σ–Algebra in diskreten Räumen.) Seien Ω_1 und Ω_2 höchstens abzählbar. Seien $\mathcal{A}_i = \mathbb{P}(\Omega_i)$ die σ–Algebren auf Ω_i. Man zeige, dass $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \mathbb{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. [Anleitung: verwende Aufgabe 3.] (2)

Bitte wenden!

5. Man beweise, dass beim n–fachen Werfen eines Würfels die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal die Augenzahl 6 gewürfelt wird, gleich $1 - (5/6)^n$ ist. [Hinweis: man berechne die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.] (2)

6. Sei $X : \Omega \to S$ eine Abbildung, und $B_1, \ldots, B_n$ p.d. Teilmengen von S. Man zeige: die Mengen $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_i\}$ sind ebenfalls p.d. (2)

Abgabetermin: Mo/Di, den 27./28.10.2008, in den Übungen.