Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 07/08

Blatt 3

1. Sei Ω höchstens abzählbar. Man zeige: die einzige σ–Algebra, die alle Elementarereignisse $\{\omega\}$ für $\omega \in \Omega$ enthält, ist $\mathbb{P}(\Omega)$. (2)

2. (Produkt σ–Algebra in diskreten Räumen.) Seien Ω_1 und Ω_2 höchstens abzählbar. Seien $\mathcal{A}_i = \mathbb{P}(\Omega_i)$ die σ–Algebren auf Ω_i. Man zeige, dass $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \mathbb{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. [Anleitung: verwende Aufgabe 1.] (2)

3. Man beweise die allgemeine Summenregel; d.h. (2)
$$\forall A, B \in \mathcal{A} : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

4. Man beweise, dass beim n–fachen Werfen eines Würfels die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal die Augenzahl 6 gewürfelt wird, gleich $1-(5/6)^n$ ist. [Hinweis: man berechne die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.] (2)

5. Sei $X : \Omega \to S$ eine Abbildung, und $B_1, \ldots, B_n$ p.d. Teilmengen von S. Man zeige: die Mengen $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_i\}$ sind ebenfalls p.d. (2)

6. Sei $\{0, 1, 2, \ldots\}$ der Grundraum und $0 < p < 1$. Man zeige, dass
$$f_p(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
eine Zähldichte ist. [Das zugehörige W–Maß heißt geometrische Verteilung mit Parameter p.] (2)

7. (GYM/BK) (Kolmogorovsches Axiomensystem.) Sei $|S| < \infty$, und $Q : \mathbb{P}(S) \to [0, 1]$ eine Mengenfunktion mit $Q(S) = 1$. Man beweise: Q ist ein W–Maß genau dann, wenn Q additiv ist; d.h., wenn (4)
$$\forall B_1, B_2 \subset S, \text{ disjunkt} : Q(B_1 + B_2) = Q(B_1) + Q(B_2).$$

8. (BA) Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ ist eine σ–Algebra genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
   (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
   (ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} :\ A \setminus B \in \mathcal{A}$
   (iii) $\forall A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, p.d. : $\sum_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. (4)

Abgabetermin: Mo./Di., den 12./13.11.2007, in den Übungen.