Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 07/08

Blatt 4

1. (a) Sei $|\Omega| < \infty$, $A \subset \Omega$, und P die Gleichverteilung auf Ω^n. Für $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ setze $X(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_A(\omega_i)$. Man beweise, dass für $k = 0, \ldots, n$:
$$P(X = k) = B_{n,|A|/|\Omega|}(\{k\}).$$
[Hinweis: Man verwende die Beweisidee zu Lemma 3.7.] (5)

   (b) Man interpretiere das Resultat in (a) im Zusammenhang mit roten und schwarzen Kugeln in einem Urnen–Experiment. (3)

2. (Vereinfachtes Lottospiel.) Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega = \{1, ..., 6\}$. Betrachte die Auszahlungsvariable $X : \Omega \to \{0, 70\}$ mit
$$X(\omega) = 70 \times 1_{\{6\}}(\omega).$$

   (a) Man zeige, dass $EX = 70/6$. (2)

   (b) Man begründe, warum bei einem Einsatz von 10 Cent, eine Teilnahme am Spiel nach rationalen Gesichtspunkten vorteilhaft war. (3)

3. Man definiere in Aufgabe 1 die Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ durch
$$X_i(\omega) = 1_A(\omega_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

   (a) Berechne die Verteilung $P(X_i \in \cdot)$ und den Erwartungswert EX_i von X_i. (2)

   (b) Berechne den Erwartungswert von $X = \sum_{i=1}^n X_i$. (1)

4. (GYM/BK) (Tod durch Pferdetritt.) Von Bortkiewicz stellte in seinem Buch “Das Gesetz der kleinen Zahlen” aus dem Jahre 1898 Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen zu der Anzahl k von jährlichen Sterbefällen durch Pferdetritt in einem preußischen Kavallerie–Regiment an. Hierzu sammelte er Daten von 10 Regimentern über einen Zeitraum von 20 Jahren. Es soll untersucht werden, ob die Modellierung durch eine Poisson–Verteilung sinnvoll ist.

Anzahl der Opfer	k	0	1	2	3	4	≥ 5
Häufigkeiten	n_k	109	65	22	3	1	0

   (i) Man erzeuge mit Xtremes einen Datensatz mittels des Daten-Editors Open data editor... Header... Discrete Data.

(ii) Visualisiere den Datensatz mit VISUALIZE… HISTOGRAM.

(iii) Passe ein geeignetes Poisson-Stabdiagramm mittels der Optionen D(ISCRETE)… DISTRIBUTION… POISSON mit einem Startwert $\lambda = 1$ an. Notiere den gewählten Parameter λ und erzeuge einen Ausdruck des Plots. (4)

5. (BA) Sei $P|\mathcal{A}$ ein W–Maß. Man zeige, daß P sub–additiv ist; d.h. für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt (4)

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Abgabetermin: Di., den 20.11.2007, in der Übung.