

Übungen zur Stochastik I, WS 08/09

Blatt 4

1. Sei $\{0, 1, 2, \dots\}$ der Grundraum und $0 < q < 1$. Man zeige, dass

$$p_q(k) = q(1 - q)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

eine Zähldichte ist. [Das zugehörige W-Maß heißt geometrische Verteilung mit Parameter q .] (2)

2. (a) Sei $|\Omega| < \infty$, $A \subset \Omega$, und P die Gleichverteilung auf Ω^n . Für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ setze $X(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_A(\omega_i)$. Man beweise, dass für $k = 0, \dots, n$:

$$P(X = k) = B_{n, |A|/|\Omega|}(\{k\}).$$

[Hinweis: Man verwende die Beweisidee zu Lemma 2.7.] (5)

- (b) Man interpretiere das Resultat in (a) im Zusammenhang mit roten und schwarzen Kugeln in einem Urnen-Experiment. (3)

3. (Tod durch Pferdetritt.) Von Bortkiewicz stellte in seinem Buch “Das Gesetz der kleinen Zahlen” aus dem Jahre 1898 Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen zu der Anzahl k von jährlichen Sterbefällen durch Pferdetritt in einem preußischen Kavallerie-Regiment an. Hierzu sammelte er Daten von 10 Regimentern über einen Zeitraum von 20 Jahren. Es soll untersucht werden, ob die Modellierung durch eine Poisson-Verteilung sinnvoll ist.

Anzahl der Opfer	k	0	1	2	3	4	≥ 5
Häufigkeiten	H_k	109	65	22	3	1	0

- (i) Man erzeuge mit Xtremes einen Datensatz mittels des Daten-Editors OPEN DATA EDITOR... HEADER... DISCRETE DATA.
- (ii) Visualisiere den Datensatz mit VISUALIZE... HISTOGRAM.
- (iii) Passe ein geeignetes Poisson-Stabdiagramm mittels der Optionen D(ISCRETE)... DISTRIBUTION... POISSON mit einem Startwert $\lambda = 1$ an. Notiere den gewählten Parameter λ und erzeuge einen Ausdruck des Plots. (4)

b.w.

4. (BA) Sei $|\Omega| < \infty$ und Q_n die Gleichverteilung auf Ω^n . Man beweise, dass für $A_i \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$, folgende Produktregel gilt: (2)

$$Q_n(X_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n Q_1(A_i)$$

5. (BA) Sei P ein W -Maß auf der σ -Algebra \mathcal{A} . Man zeige, dass P subadditiv ist; d.h. für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt (4)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Abgabetermin: Mo, den 10.11.2008, im Postfach „Kehl“.