Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 07/08

Blatt 6

1. Betrachtet werde ein Wurf mit zwei Laplace–Würfeln. Dabei gebe die Zufallsvariable X das Ergebnis des ersten, die Zufallsvariable Y das Ergebnis des zweiten Würfels an; d.h. es gelte $X((i,j)) = i$ und $Y((i,j)) = j$. Man beweise,
   (i) dass X und Y gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 6\}$ sind, (2)
   (ii) dass $P\big((X,Y) = (i,j)\big) = P(X = i)P(Y = j)$. (1)
2. Seien X und Y die Zufallsvariablen in Aufg. 1. Man berechne
   (i) $E(X + Y)$, d.h. den Erwartungswert der Augensumme, (1)
   (ii) $E(|X - Y|)$, (2)
   (iii) die Zähldichten von $\max\{X, Y\}$ und $\min\{X, Y\}$ und die zugehörigen Erwartungswerte. (4)
3. Sei (X, Y) ein auf $\{-1, 1\}^2$ gleichverteilter Zufallsvektor. Man beweise:
   (i) $EX = 0$. (1)
   (ii) XY ist gleichverteilt auf $\{-1, 1\}$. (2)
4. (GYM/BK) Der Anteil der Autofahrer, die an einer Tankstelle Super bzw. Superplus bzw. Diesel wählen, betrage 30% bzw. 20% bzw. 50%. Im Laufe eines Tages tanken n Autofahrer. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl derjenigen Autofahrer an, die Super tanken. Man berechne den Erwartungswert von X. (Anleitung: Man stelle X als Summe von n Zufallsvariablen dar und verwende Lemma 3.15.) (3)
5. (GYM/BK) Man beweise, dass der Mittelwert der geometrische Verteilung Q_p mit Parameter p (vgl. Blatt 3, Aufgabe 6) gleich $(1 - p)/p$ ist. (2)
6. (BA) Zu einer Vf F definiere die Quantilfunktion (verallgemeinerte Inverse) $F^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ durch
   $$F^{-1}(q) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq q\}, \quad q \in (0, 1).$$
   (i) Zeige, dass F^{-1} die inverse Funktion zu F ist, falls F stetig und streng monoton wachsend ist. (2)
   (ii) Zeige: Für $x \in \mathbb{R}$ und $q \in (0, 1)$ gilt die Äquivalenz (3)
   $$q \leq F(x) \Longleftrightarrow F^{-1}(q) \leq x\ .$$

Abgabetermin: Mo./Di., den 3./4.12.2007, in den Übungen.