Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 08/09

Blatt 6

1. (i) Man beweise, dass die empirische Vf

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(x_i), \quad x \in \mathbb{R},$$

zu Daten $x_1, \dots, x_n$, eine Vf ist. (3)

(ii) (Empirische Vf mit linearer Interpolation.) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ und $t_j = t_0 + j\alpha$, $j \in \mathbb{Z}$ eine Zerlegung der reellen Zahlengeraden. Für $t_j < x \leq t_{j+1}$ setze

$$F_{n,\alpha}(x) = F_{n,\alpha}(t_j) + \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j}(F_{n,\alpha}(t_{j+1}) - F_{n,\alpha}(t_j)).$$

Offenbar ist $F_{n,\alpha}$ eine Vf und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 3.5 (i). Man gebe eine explizite Darstellung einer zugehörigen W–Dichte (genannt: Histogramm) von $F_{n,\alpha}$ an. (2)

2. (Plot einer empirischen Vf.) Man erzeuge mittels Xtremes Realisationen $x_1, \dots, x_n$ zum Stichprobenumfang $n = 100$ nach der Standardexponential –Vf F (POT... Generate Univariate Data... Exponential). Damit liegt ein aktiver Datensatz vor. Man plotte F und die empirische Vf F_n — zu dem aktiven Datensatz—in dasselbe Fenster (POT... Distribution ... Exponential... DF und Visualize... Sample DF) und erzeuge einen Ausdruck. (3)

3. (Plot eines Histogramms.)

(i) Man erzeuge mit Xtremes einen Datensatz zum Stichprobenumfang $n = 100$ nach der Standardnormalverteilung (mit den Lokations– und Skalenparametern $\mu = 0$, $\sigma = 1$): SUM... Data... Generate Univariate Data... Gaussian. Xtremes greift dann auf diesen aktiven Datensatz zu.

(ii) Man konvertiere den gegebenen Datensatz in einen gruppierten Datensatz: Dazu öffne man eine Dialog–Box mit Data... Convert to ... Grouped Data, wähle eine geeignete Zerlegung des Intervalls $[-4, 4]$ und erzeuge den Datensatz mit OK.

(iii) Man plotte das zugehörige Histogramm: Visualize... Histogram.

(iv) Man plotte die Dichte der Standardnormalverteilung dazu: Distribution... Gaussian... Density. Erzeuge einen Ausdruck. (4)

b.w.

4. (BA) Man definiere in Üb., Blatt 4, Aufg. 2 die Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ durch

$$X_i(\omega) = 1_A(\omega_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

   (i) Berechne die Verteilung $P(X_i \in \cdot)$ und den Erwartungswert EX_i von X_i. (2)

   (ii) Berechne den Erwartungswert von $X = \sum_{i=1}^n X_i$. (1)

   (iii) Sei X eine $B_{n,q}$–verteilte Zufallsvariable, wobei q zusätzlich rational ist. Man zeige, dass $EX = nq$. Verwende (i) und (ii)! (3)

Abgabetermin: Mo/Di, den 24./25.11.2008, in den Übungen.