Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 07/08

Blatt 7

1. (Frechét– und Gumbel–Vfen.) Für $\gamma > 0$ setze

$$G_\gamma(x) = \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}), \quad x > -1/\gamma.$$

Sei $G_0(x) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$, die Gumbel–Vf. Man zeige für $\gamma \geq 0$:

   (i) G_γ ist eine Vf. (2)

   (ii) Berechne die W–Dichte g_γ von G_γ. (1)

   (iii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $G_\gamma(x) \to G_0(x)$ und $g_\gamma(x) \to g_0(x)$, $\gamma \to 0$. (2)

   (iv) Man plotte die Vf G_γ für drei verschiedene Parameter $\gamma > 0$ und $\gamma = 0$ in ein Diagramm, um die Konvergenz in (iii) zu visualisieren (MAX. . . DISTRIBUTION. . . EV. . . DF). (2)

   (v) Man wiederhole (iv) mit der W–Dichte g_γ von G_γ (MAX. . . DISTRIBUTION. . . EV. . . DENSITY). (2)

2. Sei F eine Vf, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Setze

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass $F_{\mu,\sigma}$ eine Vf ist. [Die Werte μ und σ heißen Lokations– und Skalenparameter. Die Vf $F = F_{0,1}$ wird als Standardversion angesprochen.] (2)

3. (Kerndichte) Es liege ein Datensatz $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vor. Alternativ zur empirischen Dichte lässt sich auch eine sogenannte Kerndichte zur Bandbreite $\alpha > 0$ definieren. Sei dazu $k : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, sodass die Voraussetzungen von 4.5(ii) erfüllt sind. Dann heißt

$$\hat{f}_{n,\alpha}(y) = \frac{1}{n\alpha} \sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{y - x_i}{\alpha}\right), \quad y \in \mathbb{R},$$

Kerndichte. Die Funktion k wird als Kern angesprochen. Man lese mit DATA . . . READ DATA aus dem Unterverzeichnis *dat* Michelson's Lichgeschwindigkeitsdaten *nu-miche.dat* ein und plotte eine Kerndichte zur automatisch gewählten Bandbreite (VISUALIZE. . . KERNEL DENSITY) mit dem obersten angegebenen Kern und BOUNDED: NOWHERE. Dazu passe man eine Normalverteilungsdichte an, wobei $\mu = 900$ und $\sigma = 50$ als Startwerte genommen werden. Man gebe die endgültig gewählten Parameter an und erzeuge einen Ausdruck. (5)

4. (GYM/BK)

   (i) Falls die Vf F die W–Dichte f besitzt, dann besitzt $F_{\mu,\sigma}$ die W-Dichte $f_{\mu,\sigma}(x) = f((x-\mu)/\sigma)/\sigma$. (2)

   (ii) Wie verändert sich die Gestalt der Normalverteilungsdichte, wenn man

      (a) μ variiert,

      (b) σ verkleinert bzw. vergrößert? (2)

5. (BA) Sei Φ die Normal–Vf mit W-Dichte $\varphi(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$. Man beweise, dass Φ den Mittelwert 0 und die Varianz 1 besitzt. (Hinweis: Man verwende partielle Integration.) (2)

6. (BA) Sei F^{-1} die Quantilfunktion zu der Vf F (vgl. Blatt 6, Aufg. 6). Sei $q \in (0,1)$. Man zeige, dass $F(F^{-1}(q)) = q$, falls $F^{-1}(q)$ ein Stetigkeitspunkt von F ist. (2)

Abgabetermin: Mo./Di., den 10./11.12.2007, in den Übungen.