Prof. Dr. R.–D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 08/09

Blatt 7

1. Betrachtet werde ein Wurf mit zwei fairen Würfeln. Dabei gebe die Zufallsvariable X das Ergebnis des ersten, die Zufallsvariable Y das Ergebnis des zweiten Würfels an; d.h. es gelte $X((i,j)) = i$ und $Y((i,j)) = j$. Man beweise,
   (i) dass X und Y gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 6\}$ sind, (2)
   (ii) dass $P\big((X, Y) = (i, j)\big) = P(X = i)P(Y = j)$. (1)
2. Seien X und Y die Zufallsvariablen in Aufg. 1. Man berechne
   (i) $E(X + Y)$, d.h. den Erwartungswert der Augensumme, (1)
   (ii) $E(|X - Y|)$. (2)
3. Seien (X, Y) ein auf $\{-1, 1\}^2$ gleichverteilter Zufallsvektor. Man beweise:
   (i) $EX = 0$. (2)
   (ii) XY ist gleichverteilt auf $\{-1, 1\}$. (2)
4. (Frechét– und Gumbel–Vfen.) Für $\gamma > 0$ setze
   $$G_\gamma(x) = \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}), \quad x > -1/\gamma.$$
   Sei $G_0(x) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$, die Gumbel–Vf. Man zeige für $\gamma \geq 0$:
   (i) G_γ ist eine Vf. (2)
   (ii) Berechne die W–Dichte g_γ von G_γ. (1)
   (iii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $G_\gamma(x) \to G_0(x)$ und $g_\gamma(x) \to g_0(x)$, $\gamma \to 0$. (2)
   (iv) Man plotte die Vf G_γ für drei verschiedene Parameter $\gamma > 0$ und $\gamma = 0$ in ein Diagramm, um die Konvergenz in (iii) zu visualisieren (MAX. . . Distribution. . . EV. . . DF). (2)
   (v) Man wiederhole (iv) mit der W–Dichte g_γ von G_γ (MAX. . . Distribution. . . EV. . . Density). (2)
5. (BA) Zu einer Vf F definiere die Quantilfunktion (verallgemeinerte Inverse) $F^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ durch $F^{-1}(q) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq q\}$, $q \in (0, 1)$.
   (i) Zeige, dass F^{-1} die inverse Funktion zu F ist, falls F stetig und streng monoton wachsend ist. (3)
   (ii) Zeige: Für $x \in \mathbb{R}$ und $q \in (0, 1)$ gilt die Äquivalenz
   $$q \leq F(x) \Longleftrightarrow F^{-1}(q) \leq x \ .$$
   Hinweis: Zu "$\Leftarrow$" beachte, dass $x_n > x \geq F^{-1}(q)$ impliziert $F(x_n) \geq q$, und verwende die rechtsseitige Steigkeit von F. (2)

Abgabetermin: Mo/Di, den 1./2.12.2008, in den Übungen.