Prof. Dr. R.-D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 07/08

Blatt 8

1. Sei $B_{n,p}$ die Binomialverteilung zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$.
   (a) Man zeige die Gleichheit $m(B_{n,p}) = np$ für $p \in [0,1]$ unter Verwendung von Lemma 5.4 der Vorlesung. [Hinweis: Man beachte, dass Lemma 5.4 für $p \in [0,1]$ gilt.] (2)
   (b) Man gebe die Binomialverteilungen $B_{n,p}$ für $p = 0, 1$ explizit an. Man berechne für diese Spezialfälle den Mittelwert direkt. (2)
2. Sei
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(x_i), \quad x \in \mathbb{R},$$
   die empirische Vf zu den Daten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ (vgl. Def. C.1).
   (a) Man beweise, dass F_n eine Vf ist. (2)
   (b) Man gebe explizit das W–Maß P_n zu der Vf F_n an. (1)
3. (Erste Eintrittszeit in einer Menge B.) Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid diskrete Zufallsvariable mit Verteilung $P(X_i \in \cdot) = Q$ auf einer höchstens abzählbaren Menge S. Die erste Eintrittszeit in $B \subset S$ ist definiert durch die Zufallsvariable
$$Y = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i \in B\},$$
   wobei $Y(\omega) = n+1$ genommen wird, falls $X_i(\omega) \in B^c$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Man zeige, dass
$$P(Y = k) = Q(B)(1 - Q(B))^{k-1}$$
   für $k = 1, \ldots, n$. Man gebe ebenfalls $P(Y = n+1)$ an! (4)
4. Man beweise, dass für diskrete Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, die folgende Aussage gilt:
$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P(X_1 = k - m, X_2 = m), \quad k \in \mathbb{Z}.$$
   [Beachte: $A \cap \sum_{i \in I} B_i = \sum_{i \in I}(A \cap B_i)$.] (3)
5. Seien X_1, X_2 unabhängige, Poisson–verteilte Zufallsvariable mit Parametern $\lambda_1 > 0$ bzw. $\lambda_2 > 0$. Man zeige, dass $X_1 + X_2$ Poisson–verteilt ist mit Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. [Beachte: $(\lambda_1 + \lambda_2)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m}$.] (3)

Abgabetermin: Mo./Di., den 17./18.12.2007, in den Übungen.