Prof. Dr. R.–D. Reiß

Übungen zur Stochastik I, WS 08/09

Blatt 8

1. Sei $B_{n,q}$ die Binomialverteilung zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $q \in [0, 1]$.
   (a) Man zeige, dass $m(B_{n,q}) = nq$ für $q \in [0, 1]$ unter Verwendung von Lemma 4.3 der Vorlesung. [Hinweis: beachte, dass Lemma 4.3 für $q \in [0, 1]$ gilt.] (2)
   (b) Man gebe die Binomialverteilungen $B_{n,q}$ für $q = 0, 1$ explizit an. Berechne für diese Spezialfälle den Mittelwert direkt. (2)

2. (BA) Sei Φ die Normal–Vf mit W–Dichte $\varphi(x) = \exp(x^2/2)/\sqrt{2\pi}$. Man beweise, dass Φ den Mittelwert 0 besitzt. Man zeige auch, dass die Varianz $\int x^2 \varphi(x)dx$ gleich 1 ist. (Hinweis: verwende partielle Integration.) (2)

3. (BA) Sei F^{-1} die Quantilfunktion zu der Vf F (vgl. Blatt 7, Aufg. 5). Sei $q \in (0, 1)$. Man zeige, dass $F(F^{-1}(q)) = q$, falls $F^{-1}(q)$ ein Stetigkeitspunkt von F ist. (3)

4. (Erste Eintrittszeit in einer Menge B.) Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid diskrete Zufallsvariable mit Verteilung $P(X_i \in \cdot) = Q$ auf einer höchstens abzählbaren Menge S. Die erste Eintrittszeit in $B \subset S$ ist definiert durch die Zufallsvariable
$$Y = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i \in B\},$$
wobei $Y(\omega) = n+1$ genommen wird, falls $X_i(\omega) \in B^c$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Man zeige, dass
$$P(Y = k) = Q(B)(1 - Q(B))^{k-1}$$
für $k = 1, \ldots, n$. Man gebe ebenfalls $P(Y = n + 1)$ an! (4)

5. Man beweise, dass für diskrete Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, die folgende Aussage gilt:
$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P(X_1 = k - m, X_2 = m), \quad k \in \mathbb{Z}.$$
[Beachte: $A \cap \sum_{i \in I} B_i = \sum_{i \in I}(A \cap B_i)$.] (3)

6. Seien X_1, X_2 unabhängige, Poisson–verteilte Zufallsvariable mit Parametern $\lambda_1 > 0$ bzw. $\lambda_2 > 0$. Zeige, dass $X_1 + X_2$ Poisson–verteilt ist mit Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. [Beachte: $(\lambda_1 + \lambda_2)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m}$.] (3)

Abgabetermin: Mo/Di, den 8./9.12.2008, in den Übungen.