

Übungen zur Stochastik I, WS 07/08

Blatt 9

1. (Lemma 5.6 der Vorlesung.) Sei $P(X \in B) > 0$. Man beweise, dass die Mengenfunktion $P(Y \in \cdot | X \in B)$ ein W-Maß ist. (3)
2. Seien S, T höchstens abzählbar. Seien $p(x), p(y)$ bzw. $p(x, y)$ die Zähl-dichten von X, Y bzw. (X, Y) , und $p(y|x)$ die bedingte Zähl-dichte von Y gegeben X . Man beweise:
 - (a) für unabhängige Zufallsvariable X, Y gilt: $p(y|x) = p(y)$, (1)
 - (b) falls $p(y|x)$ für $x \in S$ mit $p(x) > 0$ und $y \in T$ nicht von x abhängt, dann sind X, Y unabhängig, (3)
 - (c) es gilt $p(x, y) = p(y|x)p(x)$. (1)
3. Sei $p(x_1, \dots, x_n)$ die Zähl-dichte zu (X_1, \dots, X_n) und $p(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1)$ die bedingte Zähl-dichte zu X_i gegeben $(X_1, \dots, X_{i-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1})$. Man beweise, dass

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \prod_{i=2}^n p(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1)$$

mittels vollständiger Induktion. (4)

4. In der Vorlesung wurde folgender (bereinigte) Datensatz¹ erstellt zu den Zufallsvariablen X bzw. Y , die das Geschlecht bzw. die Körpergröße (in cm) der Studierenden angeben:

m	185 179 182 180 178 188 175 183 172 176 186 185 183 189 178 170 179 177 169 178 183 177 176 174 192 180 186 178 179 180 178
w	158 174 173 165 164 170 168 173 183 165 173 170 165 172 164 173 160 168 164

- (a) Man berechne die empirische Zähl-dichte $p_n(y)$ des Merkmals Körpergröße und plote dazu ein Histogramm. (2)
- (b) Man wiederhole (a) differenziert nach m und w, um bedingte empirische Zähl-dichten $p_n(y|m)$ bzw. $p_n(y|w)$ zu erhalten, und plote die bedingten Histogramme in dasselbe Diagramm wie das Histogramm aus (a). (3)

¹Eine Angabe (m,305) wurde als Ausreißer betrachtet und nicht berücksichtigt.

5. Es werde weiterhin der Datensatz aus Aufgabe 4 betrachtet.
- (a) Man gebe die Realisationen der Körpergröße (m und w zusammengefasst) mit Hilfe des Daten-Editors in Xtremes als univariaten Datensatz ein und plote eine Kerndichte zur automatisch gewählten Bandbreite. (2)
 - (b) Man wiederhole (a) für m und w getrennt, um bedingte Kerndichten für Y gegeben $X = m$ bzw. $X = w$ zu erhalten, und plote diese in dasselbe Diagramm wie die Kerndichte aus (a). (3)
6. Man schätze den Erwartungswert $E(Y)$ und die beiden bedingten Erwartungswerte (Erwartungen) $E(Y|X = m)$ und $E(Y|X = w)$ der Zufallsvariablen aus Aufgabe 4 mit Hilfe des Stichprobenmittels (arithmetischen Mittels) und der beiden bedingten Stichprobenmittel. (2)

Abgabetermin: Mo./Di., den 7./8.1.2008, in den Übungen.