

Übungen zur Stochastik I, WS 08/09

Blatt 9

1. Zeigen Sie mittels der Tschebyschevschen Ungleichung, dass mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0,97$ bei 1000 getrennten Versuchen mit einer fairen Münze mindestens 408-mal und höchstens 592-mal Zahl erscheint. (3)
2. (BA) Seien S, T höchstens abzählbar. Seien $p(x)$ die Zähldichte von X , und $p(y|x)$ die bedingte Zähldichte von Y gegeben X . Man beweise: falls $p(y|x)$ für $x \in S$ mit $p(x) > 0$ und $y \in T$ nicht von x abhängt, dann sind X, Y unabhängig. [Hinweis: verwende Kriterium 4.4 und Lemma 5.13 (i) der Vorlesung.] (3)
3. Sei $p(x_1, \dots, x_n)$ die Zähldichte zu (X_1, \dots, X_n) und $p(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1)$ die bedingte Zähldichte zu X_i gegeben $(X_1, \dots, X_{i-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1})$. Man beweise, dass

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \prod_{i=2}^n p(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1)$$

mittels vollständiger Induktion. (3)

4. (Einfaches Warteschlangenmodell.) Seien $0, 1, \dots, n$ die Zeitpunkte, an denen ein Skilift, das pro Zeiteinheit eine Person befördern kann, abfährt. Zwischen den Zeitpunkten k und $k+1$ kommen Y_k neue Skifahrer an. Die Y_k seien unabhängig. Die Länge X_k der Warteschlange unmittelbar vor der Abfahrt zur Zeit k bestimmt sich rekursiv durch

$$X_k = \max(0, X_{k-1} - 1) + Y_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

$X_0 = x_0$ sei eine bekannte Zahl. Man beweise, dass

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) &:= \\ P(X_{k+1} = x_{k+1} | (X_0, \dots, X_k) = (x_0, \dots, x_k)) &= \\ \begin{cases} P(Y_k = x_{k+1} - x_k + 1), & x_k \geq 1, \\ P(Y_k = x_{k+1}), & \text{falls } x_k = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

falls $P(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k) > 0$. (5)

5. Man lade aus dem Download-Bereich die drei Datensätze "Körpergröße" herunter.
 - (i) Berechne die empirische Zähldichte $p_n(y)$ des Merkmals Körpergröße und plote dazu ein Histogramm. (2)
 - (ii) Man wiederhole (i) differenziert nach "männlich" und "weiblich", um bedingte, empirische Zähldichten $p_n(y|m)$ bzw. $p_n(y|w)$ zu erhalten. Plote die bedingten Histogramme in dasselbe Fenster wie das Histogramm aus (i) und diskutiere das Ergebnis. (2)

Abgabetermin: Mo/Di, den 15./16.12.2008, in den Übungen.