

Wintersemester 2011

Stochastik I

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

- (a) Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) := \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0, 1].$$

Man zeige unter Nutzung des Schwachen Gesetzes der Großen Zahl, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f konvergiert.

Die Funktionen f_n heißen *Bernstein-Polynome*, und die Aussage heißt *Weierstraß'scher Approximationssatz* – Ihnen vermutlich aus Analysis II bekannt!

- (b) Beweisen Sie durch Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

- (a) Sei $X \sim \text{Pois}_\alpha$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbf{P}(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_\alpha^\infty x^n e^{-x} dx.$$

- (b) Man zeige: Das Produkt zweier stochastischer Matrizen (gleicher Größe) ist wieder eine stochastische Matrix.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Angenommen, in einem Land käme es zu einer Stichwahl zwischen den Kandidaten X und Y , an der 1.000.000 Wähler teilnehmen. Es ist bekannt, dass 1500 Stimmen ganz sicher an X und weitere 500 Stimmen ganz sicher an Y gehen. Die restlichen 998.000 Wähler voten unabhängig voneinander mit 50:50-Wahrscheinlichkeit für X oder Y . Schätzen Sie mit Hilfe der Normalapproximation die Gewinnwahrscheinlichkeit für Kandidat X ab.

Aufgabe 4* (+4* Punkte)

Ein Stab der Länge 1 wird an zwei Stellen, die voneinander unabhängig und auf dem Stab gleichverteilt sind, zerbrochen. Man bestimme die erwartete Länge des kürzesten, mittleren und längsten Bruchstückes. Es lohnt sich, nach einer geometrischen Lösung zu suchen! Man stelle z.B. die beiden Bruchstellen X und Y als Koordinaten eines auf dem Einheitsquadrat gleichverteilten Punktes dar.