

**Mathematik für Bauingenieure, Modul III**  
**Teil Differentialgleichungen**

**Dr. Theo Overhagen**  
**Fachbereich 6 Mathematik**  
**Universität Siegen**

**2006**

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Anfangs- und Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>2</b>
1.1	Definition des Anfangswertproblems, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	2
1.2	Randwertprobleme . . . . .	7
1.3	Eigenwertprobleme . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Numerische Lösungsverfahren</b>	<b>14</b>
2.1	Eulersches Polygonzugverfahren für Anfangswertprobleme 1. Ordnung . . . . .	14
2.2	Runge-Kutta-Verfahren für Anfangswertprobleme 1. Ordnung . . . . .	16
2.3	Runge-Kutta-Verfahren für Anfangswertprobleme 2. Ordnung . . . . .	19
2.4	Mehrschrittverfahren . . . . .	22
2.5	Differenzgleichungen für partielle Differentialgleichungen . . . . .	25

# 1 Anfangs- und Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Die meisten (technischen bzw. physikalischen) Vorgänge, die durch eine Differentialgleichung beschrieben werden, laufen in eindeutig bestimmter Weise ab. Um einen solchen Vorgang durch die Lösungsfunktion quantitativ zu beschreiben, müssen zusätzliche Bedingungen aus der Versuchsanordnung auf das Differentialgleichungsproblem übertragen werden, die die Werte der Parameter der allgemeinen Lösung festlegen. Aus den Zusatzbedingungen können sich Werte ergeben, die die Lösung (und gegebenenfalls ihre Ableitungen) zu einem bestimmten Zeitpunkt (dem **Anfangszeitpunkt**  $x_0$ ) annehmen soll, oder Werte der Lösung (und gegebenenfalls ihrer Ableitungen) an den beiden Enden (**Rändern**)  $x_1$  und  $x_2$  des Intervalls, in dem die Lösung betrachtet wird.

Aufgabenstellungen der ersten Art heißen **Anfangswertprobleme**, solche der zweiten Art **Randwertprobleme**.

## 1.1 Definition des Anfangswertproblems, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

**Definition 1.1.1** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet,  $(x_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \in \mathcal{G}$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Gibt es ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und eine in  $I$   $n$ -mal differenzierbare Funktion  $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{für alle } x \in I, \\ y(x_0) &= y_{01}, \quad y'(x_0) = y_{02}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}, \\ (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) &\in \mathcal{G} \quad \text{für alle } x \in I, \end{aligned}$$

dann heißt  $y(x)$  **Lösung des Anfangswertproblems**.

Ein Anfangswertproblem sollte in vernünftiger Weise ein mathematisches Modell für einen realen Vorgang darstellen. Es sollte also auf jeden Fall eine Lösung besitzen. Dabei muß das Lösungsintervall  $I$  nicht bekannt sein. Man begnügt sich zuerst einmal mit **lokalen Lösungen** auf einer (eventuell rechtsseitigen) Umgebung von  $t_0$ .

Durch die Anfangswertvorgabe sollte eine Lösung der Differentialgleichung eindeutig bestimmt sein, und kleine Veränderungen der Anfangswerte oder der rechten Seite sollten keine großen Veränderungen bei der Lösung ergeben, d.h. die Lösung sollte stetig von den Anfangswerten und der rechten Seite abhängen. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann heißt das Anfangswertproblem *sachgemäß gestellt*.

Zu klären wäre dann aber noch, ob sich die lokale Lösung auf eine globale Lösung (mit einem maximalen Intervall  $I$ , das von  $\mathcal{G}$  abhängt,) eindeutig oder mehrdeutig fortsetzen läßt. Außerdem möchte man die Lösung natürlich explizit bestimmen.

### Beispiele 1.1.2

(1) Das Anfangswertproblem  $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$

hat die Lösung  $y(x) = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

Die zugehörige Differentialgleichung ist für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  erklärt.

(2) Die Differentialgleichung  $y' = 3 \sqrt[3]{y^2}$

hat in  $I = \mathbb{R}$  die Lösungen  $y(x) \equiv 0$ , und  $y(x) = (x - C)^3$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Wir betrachten das zugehörige Anfangswertproblem mit  $y(x_0) = y_0$ .

Für  $y_0 = 0$  gibt es die beiden Lösungen  $y(x) \equiv 0$  und  $y(x) = (x - x_0)^3$ .

Für  $y_0 < 0$  ist die Lösung  $y(x) = (x - x_0 + \sqrt[3]{y_0})^3$  in  $(-\infty, x_0 - \sqrt[3]{y_0})$  eindeutig, und in  $(x_0 - \sqrt[3]{y_0}, \infty)$  ist für beliebiges  $C > x_0 - \sqrt[3]{y_0}$  die Funktion

$$y_C(x) = \begin{cases} (x - x_0 + \sqrt[3]{y_0})^3 & \text{für } x < x_0 - \sqrt[3]{y_0} \\ 0 & \text{für } x_0 - \sqrt[3]{y_0} \leq x \leq C \\ (x - C)^3 & \text{für } C \leq x < \infty \end{cases}$$

Fortsetzung der Lösung auf  $\mathbb{R}$ .

Bei den folgenden Überlegungen betrachten wir nur Vektor-Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Jede explizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f_n(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

läßt sich durch Einführung der Funktionen

$$y_1(x) := y(x), \quad y_2(x) := y'(x), \quad \dots, \quad y_n(x) := y^{(n-1)}(x)$$

in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f_n(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

überführen. (Die umgekehrte Aussage gilt natürlich nicht.)

Die Anfangswertvorgabe wird analog transformiert zu

$$\vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} = \vec{y}_0.$$

Für theoretische Aussagen über explizite (skalare) Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung reicht also die Untersuchung von expliziten (Vektor-)Differentialgleichungen 1. Ordnung aus.

Welche Bedingungen müssen die rechte Seite  $\vec{f}$  der Differentialgleichung und die Anfangswerte  $\vec{y}_0$  erfüllen, damit eine Lösung des Anfangswertproblems existiert bzw. sogar eindeutig ist?

Für stetiges  $\vec{f}$  gilt

**Satz 1.1.3 (Peano)** Sei  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet,  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $\mathcal{G}$  stetig. Dann gibt es für beliebiges  $(x_0, \vec{y}_0) \in \mathcal{G}$  zu dem Anfangswert-Problem

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= \vec{f}(x, \vec{y}), \\ \vec{y}(x_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

eine Lösung  $\vec{y}^*(x)$ , die nicht fortsetzbar ist und sowohl für  $x < x_0$  als auch für  $x > x_0$  dem Rand von  $\mathcal{G}$  beliebig nahe kommt.

**Bemerkung 1.1.4**

$\vec{y}^*(x)$  „kommt für  $x > x_0$  dem Rand von  $\mathcal{G}$  beliebig nahe“ soll heißen:

$\vec{y}^*(x)$  existiert in einem Intervall  $[x_0, b)$  (wobei auch  $b = \infty$  zugelassen sein soll) und es liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (i)  $b = \infty$ , d.h. die Lösung existiert für alle  $x \geq x_0$ .
- (ii)  $b < \infty$  und  $\limsup_{x \rightarrow b, x < b} |\vec{y}^*(x)| = \infty$ , d.h. die Lösung wird „unendlich“.
- (iii)  $b < \infty$  und  $\liminf_{x \rightarrow b, x < b} \rho(x, \vec{y}^*(x)) = 0$ . Dabei sei  $\rho$  der Abstand des Punktes  $(x, \vec{y}^*(x))$  vom Rand von  $\mathcal{G}$ , d.h. die Lösung nähert sich dem Rand.

Beispiele dazu:

Ist  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2$ , dann erfüllt  $y(x) = x^2$  Fall (i) (für beliebiges  $x_0$ ).

Ist  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2$ , dann erfüllt  $y(x) = \tan x$  Fall (ii) mit  $x_0 = 0$ ,  $b = \pi/2$ .

Ist  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$  ein (achsenparalleles) Rechteck, dann erfüllen beide Funktionen  $y_1(x) = x^2$  und  $y_2(x) = \tan x$  Fall (iii).

Wie das Beispiel 1.1.2 (2) zeigt, kann man nicht erwarten, daß ein Anfangswertproblem (1.1) mit stetiger rechter Seite eindeutig lösbar ist. Die Funktion  $\vec{f}$  muß daher im allgemeinen zusätzliche Eigenschaften besitzen.

**Definition 1.1.5** Sei  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet und  $\vec{f}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion.

$\vec{f}(x, \vec{y})$  genügt in  $\mathcal{G}$  einer **Lipschitz-Bedingung** bezüglich  $\vec{y}$  mit Lipschitz-Konstanten  $L$ , wenn für alle  $(x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in \mathcal{G}$  gilt

$$|\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)| \leq L \cdot |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|.$$

**Bemerkungen 1.1.6**

- (1)  $f(y)$  genügt in einem Intervall  $I$  einer Lipschitz-Bedingung, wenn in  $I$  die Sekantensteigungen beschränkt sind, d.h. wenn gilt

$$\left| \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq L.$$

$L$  ist dann die Lipschitz-Konstante.

- (2) Wegen der Äquivalenz der Normen im  $\mathbb{R}^n$  kann in Definition 1.1.5 eine beliebige Norm gewählt werden. Die Eigenschaft einer Funktion, einer Lipschitz-Bedingung zu genügen, ist unabhängig von der Wahl der Norm, nicht aber die Lipschitz-Konstante.
- (3) Eine Vektorfunktion  $\vec{f}$  genügt einer Lipschitz-Bedingung genau dann, wenn alle Komponenten von  $\vec{f}$  einer Lipschitz-Bedingung (bezüglich derselben Variablen) genügen.
- (4) Genügt  $\vec{f}(x, \vec{y})$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $\vec{y}$  in  $\mathcal{G}$ , dann ist  $\vec{f}(x, \vec{y})$  stetig in  $\mathcal{G}$  bezüglich  $\vec{y}$ .
- (5) Ist  $\vec{f}(x, \vec{y})$  in  $\mathcal{G}$  stetig differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen nach  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , beschränkt, dann genügt  $\vec{f}(x, \vec{y})$  in  $\mathcal{G}$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $\vec{y}$ .

**Beispiele 1.1.7**

- (1) Jede Norm im  $\mathbb{R}^n$  genügt in  $\mathbb{R}^n$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich ihres Arguments (Dreiecksungleichung).
- (2)  $f(x, y) = \frac{\sin y}{1 + x^2}$  genügt in  $\mathbb{R}^2$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$ .
- (3)  $f(y) = \sqrt{y}$  genügt in  $[0, \infty)$  keiner Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$ .

Eine Lösung des Anfangswertproblems (1.1) muß zwei Bedingungen erfüllen, die Differentialgleichung und die Anfangswertvorgabe.

Oft ist es zweckmäßig, beide Bedingungen zusammenzufassen in der Forderung der Gültigkeit folgender **Integralgleichung**

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds. \quad (1.2)$$

Wir betrachten hier speziell eine skalare Integralgleichung (für eine Vektor-Integralgleichung gilt das folgende analog,) und nehmen an, daß  $f(x, y)$  in einem Rechteck

$$D := \{(x, y); |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$$

stetig bezüglich  $x$  ist und bezüglich  $y$  einer Lipschitz-Bedingung genügt mit Lipschitz-Konstanten  $L$ . Weiter sei

$$M := \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|, \quad h := \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad I := \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < h\}.$$

Durch

$$y_0(x) := y_0, \quad y_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad n \in \mathbb{N},$$

wird eine Folge von Funktionen definiert, die alle auf  $I$  definiert sind. Die Folge konvergiert auf  $I$  (gleichmäßig) gegen eine Funktion  $y^*(x)$ , die Lösung der Integralgleichung (1.2) und damit des Anfangswertproblems (1.1) ist, und man kann den Unterschied zwischen der  $n$ -ten Näherungslösung  $y_n(x)$  und der Grenzfunktion  $y^*(x)$  abschätzen.

Allgemein gilt

**Satz 1.1.8 (Picard-Lindelöf)** Sei  $D := \{(x, \vec{y}); |x - x_0| \leq a, |\vec{y} - \vec{y}_0| \leq b\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

$\vec{f}(x, \vec{y})$  sei auf  $D$  definiert, stetig in  $D$  und genüge bezüglich  $\vec{y}$  in  $D$  einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstanten  $L$ .

Weiter sei  $M := \max\{|\vec{f}(x, \vec{y})|; (x, \vec{y}) \in D\}$  und  $h = \min(a, b/M)$ .

Dann existiert eine Lösung  $\vec{y}^*(x)$  des Anfangswertproblems (1.1) zumindest im Intervall

$I := [x_0 - h, x_0 + h]$  und ist dort die einzige Lösung, d.h. eindeutig bestimmt.

Für die  $n$ -te Näherungslösung der Folge

$$\vec{y}_0(x) := \vec{y}_0, \quad \vec{y}_n(x) := \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(s, \vec{y}_{n-1}(s)) ds, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt

$$|\vec{y}_n(x) - \vec{y}^*(x)| \leq \frac{M}{L} \left( e^{Lh} - \sum_{i=0}^n \frac{(Lh)^i}{i!} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad x \in I.$$

**Bemerkungen 1.1.9**

- (1) Der Beweis des Existenz- und Eindeigkeitssatzes ist konstruktiv, denn es wird angegeben, wie man eine Lösung des Anfangswertproblems als Grenzfunktion einer Funktionenfolge bestimmen kann. Da der Beweis auch eine Abschätzung des Fehlers liefert, der bei Abbruch nach Berechnung des  $n$ -ten Folgengliedes entsteht, hat man theoretisch eine Möglichkeit, die Lösung des Anfangswertproblems bis auf einen vorher festgelegten Approximationsfehler zu bestimmen. Allerdings konvergiert das Verfahren recht langsam und bei jedem Approximationsschritt ist ein Integral zu berechnen, was im allgemeinen wiederum eine Approximation erfordert.
- (2) Ersetzt man in den Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf den "Quader"  $D$  durch ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , und ist die rechte Seite  $f$  der Differentialgleichung stetig in  $G$  und erfüllt dort eine lokale Lipschitz-Bedingung, dann erhält man zu jedem Anfangswert  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$  eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems, deren Graph sich beidseitig bis zum Rand von  $G$  erstreckt.

Zu einem sachgemäß gestellten Anfangswertproblem gehört die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten und der rechten Seite der Differentialgleichung. Genügt die rechte Seite der Differentialgleichung einer Lipschitz-Bedingung, dann gilt

**Satz 1.1.10** Sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet,  $\vec{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine in  $G$  stetige Funktion, die in  $G$  einer Lipschitz-Bedingung mit Konstanten  $L$  genügt. Dann gilt:

- (a) Für je zwei Lösungen  $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x)$  der Differentialgleichung  $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ , die in  $G$  verlaufen, gilt

$$|\vec{y}_1(x) - \vec{y}_2(x)| \leq |\vec{y}_1(x_0) - \vec{y}_2(x_0)| \cdot e^{L|x-x_0|}.$$

- (b) Sei  $\epsilon > 0$ ,  $\vec{f}^* : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion mit

$$|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}^*(x, \vec{y})| < \epsilon \quad \text{für alle } (x, \vec{y}) \in G.$$

Für

$$\text{eine Lösung } \vec{y}_1(x) \quad \text{der Differentialgleichung } \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

und

$$\text{eine Lösung } \vec{y}_1^*(x) \quad \text{der Differentialgleichung } \vec{y}' = \vec{f}^*(x, \vec{y})$$

mit demselben Anfangswert

$$\vec{y}_1(x_0) = \vec{y}_1^*(x_0) = \vec{y}_0$$

gilt dann

$$|\vec{y}_1(x) - \vec{y}_1^*(x)| \leq \epsilon \cdot \delta \cdot e^{L|x-x_0|} \quad \text{für alle } |x-x_0| < \delta.$$

**Beispiele 1.1.11**

- (1) Die nicht elementar integrierbare Differentialgleichung

$$y' = x \cos y + 1 - x \cos x$$

hat die spezielle Lösung  $y_1(x) = x$ .

Die rechte Seite ist partiell nach  $y$  differenzierbar mit  $f_y(x, y) = -x \sin y$ , genügt daher in  $0 \leq x \leq 1$  einer Lipschitz-Bedingung mit Konstanten  $L = 1$ . Damit ist  $y_1$  die eindeutig bestimmte Lösung mit Anfangswert  $y(0) = 0$ .

Für eine Anfangswertvorgabe  $y(0) = y_0 \neq 0$  erhält man für die eindeutige Lösung  $y_2(x)$  des entsprechenden Anfangswertproblems die Abschätzung

$$x - |y_0|e^x \leq y_2(x) \leq x + |y_0|e^x.$$

- (2) Die Funktion  $f(x, y) = \sin y + x$  erfüllt in  $G := \{(x, y); |y| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}\}$  eine Lipschitz-Bedingung mit Konstanten  $L = 1$  und ist dort stetig.

Die lineare Funktion  $f^*(x, y) = \frac{2}{\pi}y + x$  unterscheidet sich von  $f$  in  $G$  um weniger als  $\epsilon = 0,211$ . Wie man leicht sieht, ist

$$y_1^*(x) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4} \left( e^{2x/\pi} - 1 \right)$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f^*(x, y), \quad y(0) = 0.$$

Damit erhält man für die Lösung  $y_1(x)$  des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0,$$

für  $|x| < \delta$  die Abschätzung

$$-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4} \left( e^{2x/\pi} - 1 \right) - \epsilon \cdot \delta \cdot e^x \leq y_1(x) \leq -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4} \left( e^{2x/\pi} - 1 \right) + \epsilon \cdot \delta \cdot e^x.$$

## 1.2 Randwertprobleme

Z.B. für Bewegungsvorgänge ist die Vorgabe von Anfangswerten sinnvoll. Möchte man aber die Durchbiegung eines Balkens, der auf zwei Stützen gelagert ist, zwischen den Stützen unter einer vorgegebenen Last bestimmen, dann kennt man die Werte an den beiden Lagerungsstellen.

Sucht man allgemein zu einer vorgegebenen Differentialgleichung eine Lösung  $y(x)$  in einem Lösungsintervall  $I = [a, b]$ , und sind die Werte der Lösung und/oder ihrer Ableitungen an den Stellen  $x = a$  und  $x = b$  festgelegt, dann spricht man von einem Randwertproblem.

**Beispiel 1.2.1** Gesucht sind die Lösungen der Schwingungsgleichung

$$y'' + \mu^2 y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{\mu}\right) = c.$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung ist

$$y(x) = \alpha \cos \mu x + \beta \sin \mu x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Aus der Bedingung  $y(0) = 0$  folgt  $\alpha = 0$ .

Für  $c \neq 0$  existiert keine Lösung.

Für  $c = 0$  ist für jedes  $\beta \in \mathbb{R}$   $y(x) = \beta \sin \mu x$  Lösung.

Für die Existenz oder die Eindeutigkeit einer Lösung ist also auch die Randwertvorgabe entscheidend im Gegensatz zu den Anfangswertproblemen, wo nur die Stetigkeit bzw. eine Lipschitz-Bedingung der rechten Seite der Differentialgleichung entscheidend war.

Die Lösung eines Randwertproblems kann man natürlich direkt durch Lösen der Differentialgleichung und Einsetzen der Randbedingungen (zur Bestimmung der Integrationskonstanten) berechnen. Wir betrachten im folgenden nur lineare Randwertprobleme, bei denen sowohl die Differentialgleichung als auch die Randwertvorgaben linear sind. Weiter formen wir wie bei den Anfangswertproblemen Differentialgleichungen höherer Ordnung in Vektordifferentialgleichungen 1. Ordnung um.

**Definition 1.2.2** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Die Matrixfunktion  $A(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und die Vektorfunktion  $\vec{f}(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien stetig in  $[a, b]$ .  $R, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  seien feste  $(n, n)$ -Matrizen und  $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$  ein fester Vektor.

Dann heißt

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= A(x)\vec{y} + \vec{f}(x), & a \leq x \leq b, \\ R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) &= \vec{r}, & \text{Rang}(R, S) = n \end{aligned} \tag{1.3}$$

**lineares Randwertproblem.**

Für  $\vec{f}(x) \equiv \vec{0}, \vec{r} = \vec{0}$  heißt es **homogen**, für  $\vec{f}(x) \not\equiv \vec{0}, \vec{r} \neq \vec{0}$  **inhomogen** und für  $\vec{f}(x) \equiv \vec{0}$  oder  $\vec{r} = \vec{0}$  **halbhomogen**.

Im obigen Beispiel ist  $a = 0, b = \frac{\pi}{\mu}, n = 2, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ .

**Bemerkungen 1.2.3**

1. Ein homogenes Randwertproblem hat immer die triviale Lösung  $\vec{y}(x) \equiv \vec{0}$ .
2. Wie das obige Beispiel mit der Schwingungsgleichung zeigt, hat ein halbhomogenes Randwertproblem nicht immer eine Lösung.
3. Wie bei linearen Differentialgleichungen gilt das "Superpositionsprinzip": Ist  $\vec{y}_p(x)$  eine spezielle Lösung eines inhomogenen Randwertproblems,  $\vec{y}_h(x)$  die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Randwertproblems, dann ist  $\vec{y}(x) = \vec{y}_p(x) + \vec{y}_h(x)$  die allgemeine Lösung des inhomogenen Randwertproblems.

Aus der Theorie der linearen Gleichungssysteme folgt:

**Satz 1.2.4** Seien  $a, b, A(x), \vec{f}(x), R, S$  und  $\vec{r}$  wie in obiger Definition, und sei  $Y(x)$  eine Funktionalmatrix der zum Randwertproblem (1.3) gehörenden homogenen Differentialgleichung und  $D := R \cdot Y(a) + S \cdot Y(b)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $\det D \neq 0$ .
- (b) Das inhomogene Randwertproblem (1.3) ist eindeutig lösbar.
- (c) Das zu (1.3) gehörende homogene Randwertproblem hat nur die triviale Lösung.

Ist eine Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichung bekannt, dann kann man mit Hilfe der Variation der Konstanten die Lösung des halbhomogenen Randwertproblems mit inhomogener Differentialgleichung und homogenen Randbedingungen lösen:

**Satz 1.2.5** Gegeben sei das Randwertproblem (1.3). Ist  $Y(x)$  Fundamentalmatrix der zugehörigen homogenen Differentialgleichung,  $D := R \cdot Y(a) + S \cdot Y(b)$  mit  $\det D \neq 0, G(x, u) : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$G(x, u) := \begin{cases} Y(x) \cdot \left( E - D^{-1}SY(b) \right) Y^{-1}(u) & \text{für } a \leq u \leq x \\ Y(x) \cdot \left( -D^{-1}SY(b) \right) Y^{-1}(u) & \text{für } x < u \leq b \end{cases},$$

dann besitzt das halbhomogene Randwertproblem

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x), \quad a \leq x \leq b, \quad R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) = 0 \tag{1.4}$$

die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(x) = \int_a^b G(x, u)\vec{f}(u) du.$$

**Bemerkungen 1.2.6**

(1) Die Funktion aus dem vorigen Satz heißt "Greensche Funktion" des Randwertproblems. Sie gibt an, wie sich die Störfunktion  $\vec{f}(u)$  der Differentialgleichung auf die Lösung  $\vec{y}(x)$  an der Stelle  $x$  auswirkt.

(2) Die Greensche Funktion wird durch folgende drei Eigenschaften charakterisiert:

(a) Für festes  $u \in [a, b]$  und  $x \neq u$  ist  $G(\cdot, u)$  (als Funktion von  $x$ ) differenzierbar und Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, u) = A(x)G(x, u).$$

(b)  $G$  erfüllt für festes  $u \in (a, b)$  die homogenen Randbedingungen

$$RG(a, u) + SG(b, u) = 0.$$

(c) Längs  $x = u$  ist  $G$  unstetig und es gilt

$$G(x+0, x) - G(x-0, x) = E, \quad a \leq x \leq b.$$

(3) Mit Hilfe der Greenschen Funktion löst man ein beliebiges Randwertproblem der Form (1.3): Zuerst sucht man eine in  $[a, b]$  stetig differenzierbare Funktion  $\vec{y}_r(x)$ , die die inhomogenen Randbedingungen

$$R\vec{y}_r(a) + S\vec{y}_r(b) = \vec{r}$$

erfüllt. Dann berechnet man mit der Green-Funktion  $G$  des zugehörigen halbhomogenen Randwertproblems (1.4)

$$\vec{z}(x) = \int_a^b G(x, u) \left( \vec{f}(u) - \vec{y}_r'(u) + A(u)\vec{y}_r(u) \right) du.$$

Dann ist  $\vec{y}(x) := \vec{y}_r(x) + \vec{z}(x)$  ist die Lösung von (1.3).

**Beispiel 1.2.7** Das Randwertproblem

$$y'' + \mu^2 y = e^x, \quad y(0) = y(s) = 0, \quad x \in [0, s],$$

hat die homogene Lösungsbasis

$$y_1(x) = \cos \mu x, \quad y_2(x) = \sin \mu x.$$

Ist  $G(x, u)$  eine Greensche Funktion des zugehörigen Randwertproblems mit inhomogener Vektor-Differentialgleichung 1. Ordnung und Störfunktion  $\vec{f}(x)$ , dann ist

$$\vec{y}(x) = \int_a^b G(x, u) \vec{f}(u) du$$

die zugehörige Lösung. Sei  $\vec{g}(x, u)$  die  $n$ -te Spalte von  $G(x, u)$ . Da nur die  $n$ -te Komponente von  $\vec{f}(u)$  von 0 verschieden ist und die erste Komponente von  $\vec{y}(x)$  als Lösung des skalaren Randwertproblems gesucht wird, muß nur die erste Komponente  $g_1(x, u) = G_{1n}(x, u)$  von  $G(x, u)$  bestimmt werden. Sie heißt **Greensche Funktion** des skalaren Randwertproblems.

Wegen der speziellen Gestalt der Koeffizientenmatrix  $A(x)$  ist  $g_1$  in den Bereichen  $a \leq u \leq x$  und

$x \leq u \leq b$  jeweils Lösung der skalaren homogenen Differentialgleichung, also Linearkombination der Lösungsbasis. Damit erhält man für unser spezielles Beispiel den Ansatz

$$g_1(x, u) = \begin{cases} c_1(u) \cos \mu x + d_1(u) \sin \mu x & \text{für } 0 \leq u \leq x \\ c_2(u) \cos \mu x + d_2(u) \sin \mu x & \text{für } x \leq u \leq s \end{cases}.$$

Aus der Unstetigkeit von  $G(x, u)$  in  $x = u$  folgt, daß dort  $g_1$   $(n - 2)$ -mal stetig nach  $x$  differenzierbar ist, und

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} g_1(x + 0, x) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} g_1(x - 0, x) = 1,$$

in dem speziellen Beispiel für die unbekanntenen Funktionen  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$ ,  $d_1(u)$  und  $d_2(u)$  also die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1(x) \cos \mu x + d_1(x) \sin \mu x - c_2(x) \cos \mu x - d_2(x) \sin \mu x &= 0 \\ -\mu c_1(x) \sin \mu x + \mu d_1(x) \cos \mu x + \mu c_2(x) \sin \mu x - \mu d_2(x) \cos \mu x &= 1 \end{aligned}$$

$g(x, u)$  erfüllt (als Spalte von  $G$ ) für alle  $u$  die homogenen Randbedingungen in  $x$ , und damit ergeben sich in unserem Beispiel (mit Umbenennung der Variablen  $u$  zu  $x$ ) zwei weitere Gleichungen

$$\begin{aligned} c_2(x) \cos \mu 0 + d_2(x) \sin \mu 0 &= 0 \\ c_1(x) \cos \mu s + d_1(x) \sin \mu s &= 0 \end{aligned}$$

und damit als Greensche Funktion

$$g_1(x, u) = \begin{cases} -\frac{\sin \mu(s-x) \sin \mu u}{\mu \sin \mu s} & \text{für } 0 \leq u \leq x \\ -\frac{\sin \mu x \sin \mu(s-u)}{\mu \sin \mu s} & \text{für } x < u \leq s \end{cases}$$

und als Lösung des Randwertproblems

$$x(x) = \int_0^s g_1(x, u) e^u du = \frac{1}{1 + \mu^2} \left( e^x - \cos \mu x + \frac{\cos \mu s - e^s}{\sin \mu s} \sin \mu x \right).$$

### 1.3 Eigenwertprobleme

**Beispiel 1.3.1** Wir betrachten eine zwischen den Punkten  $(0, 0)$  und  $(s, 0)$  fest eingespannte, in  $y$ -Richtung schwingende Saite in der  $(x, y)$ -Ebene und suchen die Koordinate  $y(t, x)$  eines Punktes der Saite in Abhängigkeit vom Ort  $x \in [0, s]$  und der Zeit  $t > 0$ .

Die Funktion genügt der partiellen Differentialgleichung

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ , den Anfangsbedingungen

$$y(0, x) = f(x), \quad y_t(0, x) = g(x), \quad x \in [0, s],$$

mit stetigen Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ , die die Bewegung der Saite zum Anfangszeitpunkt beschreiben, und den Randbedingungen

$$y(t, 0) = y(t, s) = 0, \quad t \geq 0.$$

Eine Möglichkeit zur Rückführung dieses Anfangs-Randwert-Problems auf die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist der **Separationsansatz**

$$y(t, x) = T(t) \cdot X(x),$$

der (mit  $X' = \frac{\partial X}{\partial x}$  und  $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$ ) zu der Gleichung

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$$

führt. Die linke Seite hängt nur von  $t$ , die rechte nur von  $x$  ab, d.h. die Gleichung ist nur dann erfüllbar, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten  $-\lambda$  sind und die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\ddot{T} + c^2 \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0$$

lösbar sind. Die Randbedingungen an die Funktion  $y(t, x)$  führt auf Randbedingungen

$$X(0) = X(s) = 0$$

an die Funktion  $X$ . Gesucht sind also reelle Zahlen  $-\lambda$ , so daß das homogene Randwertproblem

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(s) = 0,$$

nichttriviale Lösungen besitzt.

**Definition 1.3.2** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ,  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und positiv,  $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $r$  positiv und  $L$  der lineare Differentialoperator mit  $LX := (p(x)X')' + q(x)X$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \neq \gamma^2 + \delta^2$ . Dann heißt

$$LX + \lambda r(x)X = 0, \quad \alpha X(a) + \beta X'(a) = 0, \quad \gamma X(b) + \delta X'(b) = 0,$$

**Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem.** Existiert ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so daß das zugehörige Randwertproblem Lösungen  $y \neq 0$  hat, dann heißt  $\lambda$  **Eigenwert** und die Lösung **Eigenfunktion** oder **Eigenlösung** zu diesem Eigenwert.

### Bemerkungen 1.3.3

1. Beim Sturm-Liouville-schen Eigenwertproblem betrachtet man eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in spezieller Form. Das ist keine echte Einschränkung, da man jede lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$X'' + a_1(x)X' + a_0(x)X = -\lambda X$$

durch Multiplizieren mit  $p(x) := e^{\int a_1(x) dx}$  und mit  $q(x) := a_0(x) \cdot p(x)$  und  $r(x) := p(x)$  in diese Form überführen kann.

2. Sind  $X_1, X_2$  Eigenfunktionen zu demselben Eigenwert  $\lambda$ , dann ist jede Linearkombination ebenfalls Eigenfunktion zu  $\lambda$ .
3. Die in  $[a, b]$  stetigen Funktionen bilden einen Vektorraum.

Durch

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b r(x)u(x)v(x) dx$$

wird für beliebige in  $[a, b]$  stetige Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  ein Skalarprodukt definiert.

(Mit Hilfe dieses Skalarproduktes kann man auf dem Funktionen-Vektorraum z.B. festlegen, wann zwei Funktionen „orthogonal“ zueinander sind, und durch  $d(u, v) := \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$  einen „Abstand“ der beiden Funktionen definieren.)

Sind  $X_1, X_2$  Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , dann gilt

$$\langle X_1, X_2 \rangle = 0,$$

die Eigenfunktionen sind also bezüglich dieses Skalarproduktes orthogonal (und damit auch linear unabhängig).

Für zwei beliebige in  $[a, b]$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$ , die (nur) die Randbedingungen erfüllen, und für den Differentialoperator  $L$  aus der Definition 1.3.2 gilt

$$\langle \frac{1}{r}Lu, v \rangle = \langle u, \frac{1}{r}Lv \rangle .$$

Der Operator  $\frac{1}{r}L$  heißt auf dieser Funktionenmenge **selbstadjungiert**. Aus der Vektorraumtheorie (Linearen Algebra) folgt, daß die zugehörigen Eigenwerte reell sind.

Für  $\alpha\beta \leq 0 \leq \gamma\delta$  kann man die (reellen) Eigenwerte zudem als streng monoton wachsende Folge anordnen, die entweder endlich ist oder gegen  $\infty$  konvergiert.

**Fortsetzung Beispiel 1.3.1** Das Eigenwertproblem zu der schwingenden Saite hat die Eigenfunktionen

$$X_n(x) = \alpha \sin \frac{n\pi}{s} x \quad \text{zu dem Eigenwert} \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{s^2}.$$

In die gewöhnliche Differentialgleichung für  $T(t)$  sind nun diese Eigenwerte einzusetzen, und es ergeben sich als zugehörige Lösungen

$$T_n(t) = c_{1,n} \cos \frac{n\pi c}{s} t + c_{2,n} \sin \frac{n\pi c}{s} t$$

mit beliebigen Konstanten  $c_{1,n}$  und  $c_{2,n}$ . Setzt man  $\omega_n := \frac{n\pi}{s}$ , dann ist das Produkt

$$y_n(t, x) = T_n(t) \cdot X_n(x) = (c_{1,n} \cos \omega_n ct + c_{2,n} \sin \omega_n ct) \sin \omega_n x$$

der Lösungen zu einem festen Eigenwert  $\lambda_n$  eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, die die Randbedingungen erfüllt. Setzt man sie in die Anfangsbedingungen ein, dann erhält man

$$y_n(0, x) = c_{1,n} \sin \omega_n x \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} y_n(0, x) = c_{2,n} \omega_n c \sin \omega_n x.$$

$y_n$  erfüllt also im allgemeinen nicht die Anfangsbedingungen.

Andererseits erfüllen wegen der Linearität des Differentialoperators und der Randbedingungen aber auch aus diesen Funktionen  $y_n$  gebildete Linearkombinationen (und bei geeigneten Konvergenzeigenschaften) entsprechende Reihen die Differentialgleichung und die Randbedingungen.

Der Ansatz

$$y(t, x) := \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{1,n} \cos \omega_n ct + c_{2,n} \sin \omega_n ct) \sin \omega_n x$$

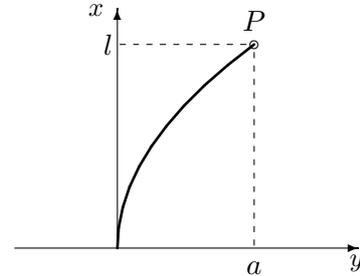
führt auf das Problem, die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n} \sin \omega_n x \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2,n} \omega_n c \sin \omega_n x$$

darzustellen. Das ist das Problem der Entwicklung der Funktionen  $f$  und  $g$  in Fourier-Reihen.

**Beispiel 1.3.4** Ein Stab der Länge  $l$ , mit Elastizitätsmodul  $E$  und konstantem Flächenträgheitsmoment  $I_0$  sei fest im Boden verankert und trage am oberen Ende eine Last  $P$ .

Wenn die Last zu groß ist, wird der Stab aus der vertikalen Anfangslage seitlich ausweichen, die Last sich um ein  $a > 0$  horizontal verschieben und versuchen, den Stab zu verbiegen.



Wir wollen (für ein festes  $a$ ) die „Biegelinie“  $y(x)$  bzw.  $u(x) := a - y(x)$  bestimmen, die Lösung der Differentialgleichung

$$u'' + \frac{P}{EI_0} u = 0$$

ist und die Randbedingungen

$$u(l) = 0, \quad u'(0) = 0$$

erfüllt.

Mit  $\lambda := \frac{P}{EI_0}$  ergibt sich das Eigenwertproblem

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(l) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Für eine nichttriviale Lösung  $u(x)$  folgt aus der Differentialgleichung  $\lambda u = -u''$  und den Randbedingungen mit Hilfe partieller Integration

$$\lambda \int_0^l u^2 dx = - \int_0^l u \cdot u'' dx = -[u \cdot u']_0^l + \int_0^l (u')^2 dx = \int_0^l (u')^2 dx,$$

d.h. es können nur positive Eigenwerte auftreten. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$u_n(x) = a \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + b \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Aus der 1. Randbedingung folgt  $b = 0$  und damit ergeben sich aus der 2. Randbedingung (wegen  $a \neq 0$ ) die Eigenwerte

$$\lambda_n = (2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$u_n(x) = a \cos(2n + 1) \frac{\pi}{2l} x, \quad a \neq 0.$$

Die kleinste Last, bei der sich eine Biegung ergibt, ist also

$$P_1 = E \cdot I_0 \cdot \frac{\pi^2}{4l^2},$$

die sog. **Eulersche Knicklast**.

## 2 Numerische Lösungsverfahren

Zahlreiche - insbesondere nichtlineare Differentialgleichungen, wie z.B.

$$y' = x^2 + y^2$$

sind elementar nicht lösbar oder der Aufwand zur Bestimmung einer Lösung ist zu groß. In diesen Fällen versucht man, die Lösungskurve unter Verwendung spezieller Näherungsverfahren punktweise zu berechnen.

Wichtig dabei ist, daß man z.B. bei einem Anfangswertproblem vor der Rechnung weiß, daß es genau eine Lösung hat. Speziell die Eindeutigkeit ist auch wichtig, sonst besteht die Gefahr, daß man eine Funktion bestimmt, die an einigen Stellen Näherungslösung einer der Lösungen und an anderen Stellen einer anderen Lösung ist.

Wir gehen also im folgenden immer davon aus, daß das entsprechende Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat.

### 2.1 Eulersches Polygonzugverfahren für Anfangswertprobleme 1. Ordnung

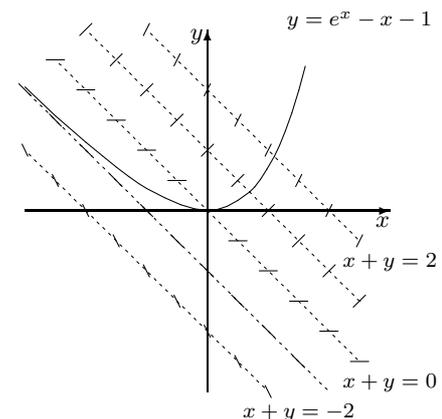
Ist die Funktion  $y(x)$  Lösung der expliziten Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  im Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , dann wird durch  $f(x, y)$  in jedem Punkt von  $\mathcal{B} = \{(x, y(x)); x \in I\}$  die Steigung der Lösungskurve gegeben. Läuft also ein Punkt auf einer Lösungskurve, dann wird er mit Steigung  $y' = f(x, y)$  „weitergeschickt“.

Man kann daher die Differentialgleichung geometrisch veranschaulichen, indem man in jedem zulässigen Punkt (in dem  $f$  definiert ist) ein kleines Geradenstück der Richtung  $f(x, y)$  anträgt. Ein solches Objekt heißt **Linienelement**, und die Gesamtheit der Linienelemente nennt man **Richtungsfeld**.

Die Lösungen der Differentialgleichung bilden eine Kurvenschar. Eine Kurve, die alle Punkte der Schar mit demselben Anstieg verbindet, heißt **Isokline**.

**Beispiel 2.1.1**  $y' = x + y$ .

Die Isoklinen sind die Geraden  $x + y = \text{const.}$  und  $y = e^x - x - 1$  ist Lösung der Differentialgleichung durch den Punkt  $(0, 0)$ .



Wir betrachten nun - ausgehend von  $x_0$  - äquidistante Punkte

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \quad \dots$$

(mit  $h > 0$ ) und nähern die unbekannte Lösung des Anfangswertproblems an durch die stückweise lineare Funktion

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0, y_0) =: y_1 & \text{für } x_0 \leq x \leq x_1 \\ y_1 + (x - x_1) \cdot f(x_1, y_1) =: y_2 & \text{für } x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_2 + (x - x_2) \cdot f(x_2, y_2) =: y_3 & \text{für } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Nach dem Satz von Taylor kann man die Funktion  $y(x)$  an der Stelle  $x_0 + h$  in ein Polynom 1. Ordnung plus Restglied entwickeln:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2y''(\xi), \quad x \leq \xi \leq x+h.$$

Bei jedem Schritt ( $h$ -Intervall) ist der Fehler also von der Größenordnung  $h^2$ , Bezeichnung  $O(h^2)$ . Betrachtet man ein festes  $x$ -Intervall und variiert  $h$ , dann ist die Anzahl der Schritte proportional zu  $\frac{1}{h}$ , d.h. insgesamt ist der Fehler proportional zu

$$h^2 \cdot \frac{1}{h} = h^1.$$

Daher heißt das Eulersche Polygonzugverfahren ein Näherungsverfahren erster Ordnung.

**Beispiel 2.1.2** In dem Anfangswertproblem

$$y' = y + e^x, \quad y(0) = 1,$$

ist die Differentialgleichung linear und daher elementar lösbar mit Lösung

$$y(x) = (x + c) \cdot e^x.$$

Einsetzen des Anfangswertes ergibt

$$y(x) = (x + 1) \cdot e^x.$$

Für das Intervall  $[0|0,25]$  berechnen wir die Näherungslösung  $\tilde{y}$  für die Schrittweite  $h = 0,05$  und anschließend für die halbierte Schrittweite  $h = 0,025$ .

**Schrittweite  $h = 0,05$ :**

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i$	$h \cdot f(x_i, \tilde{y}_i) = 0,05 \cdot (\tilde{y}_i + e^{x_i})$	$y(x_i)$
0	0,00	1,000000	0,100000	1,000000
1	0,05	1,100000	0,107564	1,103835
2	0,10	1,207564	0,115637	1,215688
3	0,15	1,323200	0,124252	1,336109
4	0,20	1,447452	0,133443	1,465683
5	0,25	1,580895		1,605032

Schrittweite  $h = 0,025$ :

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i$	$h \cdot f(x_i, \tilde{y}_i) = 0,025 \cdot (\tilde{y}_i + e^{x_i})$	$y(x_i)$
0	0,000	1,000000	0,050000	1,000000
1	0,025	1,050000	0,051883	1,050948
2	0,050	1,101883	0,053829	1,103835
3	0,075	1,155712	0,55840	1,158725
4	0,100	1,211552	0,057918	1,215688
5	0,125	1,269470	0,060065	1,274792
6	0,150	1,329535	0,062284	1,336109
7	0,175	1,391819	0,064577	1,399714
8	0,200	1,456396	0,066945	1,465683
9	0,225	1,523341	0,069392	1,534095
10	0,250	1,592733		1,605032

Ist  $R_1$  der Gesamtfehler bei Schrittweite  $h$ ,  $R_2$  der Gesamtfehler bei Schrittweite  $2h$ , dann vervierfacht sich der Fehler jedes Schritts wegen  $R \sim h^2$  beim Übergang von  $h$  zu  $2h$ . Andererseits hat man bei  $2h$  nur die halbe Schrittzahl, d.h. insgesamt verdoppelt sich der Fehler, also

$$R_2 \approx 2 R_1.$$

Moderne Software wählt zu einer gegebenen Fehler-Toleranz  $T$  automatisch eine Schrittweite

$$h_n = \sqrt{\frac{2 \cdot T}{|y''(x_n)|}}.$$

## 2.2 Runge-Kutta-Verfahren für Anfangswertprobleme

### 1. Ordnung

Wie beim Eulerschen Polygonzug-Verfahren wird beim Runge-Kutta-Verfahren die Lösungskurve in jedem Teilintervall durch eine Gerade ersetzt, ausgehend vom Anfangspunkt  $x_0$  im Intervall  $x_0 \leq x \leq x_1$  durch die Gerade

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0).$$

Allerdings wird für die Steigung  $m$  nicht der Wert  $f(x_0, y_0)$  gesetzt, sondern ein Wert, der aus dem Steigungswert der Lösungskurve bei  $(x_0, y_0)$  und näherungsweise Steigungswerten bei  $x_1$  und dem Mittelpunkt mit bestimmten Gewichtungen berechnet wird. Dabei werden die Anteile der Steigungen beim Mittelpunkt an zwei verschiedenen  $y$ -Werten berücksichtigt.

**Definition 2.2.1 (Runge-Kutta-Verfahren)**

Die Näherungslösung des Anfangswertproblems 1. Ordnung

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [a, b],$$

wird nach Runge-Kutta folgendermaßen berechnet:

Sei

$$n \in \mathbb{N}, \quad h := \frac{b-a}{n}, \quad x_i := x_0 + i \cdot h, \quad 1 \leq i \leq n,$$

und

$$y_1 := y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &:= h \cdot f(x_0, y_0), \\ k_2 &:= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &:= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &:= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3). \end{aligned}$$

$y_1$  wird als Näherung von  $y(x_1)$  betrachtet.

Ausgehend vom Anfangswert  $(x_1, y_1)$  wird dann in  $[x_1, x_2]$  mit Runge-Kutta analog der Näherungswert  $y_2$  von  $y(x_2)$  berechnet.

**Beispiel 2.2.2** Wir betrachten nochmals das Anfangswertproblem

$$y' = y + e^x, \quad y(0) = 1,$$

mit der Lösung

$$y(x) = (x+1) \cdot e^x$$

und berechnen mit der Runge-Kutta-Methode für das Intervall  $[0|0,25]$  und Schrittweite  $h = 0,05$  die Näherungslösung  $\tilde{y}$ .

**Schrittweite  $h = 0,05$ :** Bei jedem Schritt müssen in einem Unterschritt

$$x_1^* := x_i, \quad x_2^* := x_3^* := x_i + \frac{h}{2}, \quad x_4^* := x_i + h,$$

$$y_1^* := \tilde{y}_i, \quad y_2^* := \tilde{y}_i + \frac{k_1}{2}, \quad y_3^* := \tilde{y}_i + \frac{k_2}{2}, \quad y_4^* := \tilde{y}_i + k_3,$$

$$k_j := h \cdot f(x_j^*, y_j^*), \quad 1 \leq j \leq 4, \quad \text{und} \quad K_i := \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

berechnet werden.

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + K_{i-1}$	$j$	$x_j^*$	$y_j^*$	$f(x_j^*, y_j^*)$	$k_j$	$K_i$	$y(x_i)$
0	0,000	1,000000	1	0,000	1,000000	2,000000	0,100000		1,000000
			2	0,025	1,050000	2,075315	0,103766		
			3	0,025	1,051883	2,077198	0,103860		
			4	0,050	1,103860	2,155131	0,107757	0,103835	
1	0,050	1,103835	1	0,050	1,103835	2,155106	0,107755		1,103835
			2	0,075	1,157712	2,235596	0,111780		
			3	0,075	1,159725	2,237609	0,111880		
			4	0,100	1,215715	2,320886	0,116044	0,111853	
2	0,100	1,215688	1	0,100	1,215688	2,320859	0,116043		1,215688
			2	0,125	1,273709	2,406858	0,120343		
			3	0,125	1,275859	2,409008	0,120450		
			4	0,150	1,336138	2,497973	0,124899	0,120421	
3	0,150	1,336109	1	0,150	1,336109	2,497944	0,124897		1,336109
			2	0,175	1,398558	2,589804	0,129490		
			3	0,175	1,400854	2,592101	0,129605		
			4	0,200	1,465714	2,687117	0,134356	0,129574	
4	0,200	1,465683	1	0,200	1,465683	2,687086	0,134354		1,465683
			2	0,225	1,532860	2,785183	0,139259		
			3	0,225	1,535313	2,787636	0,139382		
			4	0,250	1,605065	2,889090	0,144455	0,139348	
5	0,250	1,605032							1,605032

Wie beim Euler-Verfahren kann man den Fehler abschätzen, indem man das Verfahren mit Schrittweite  $h$  und doppelter Schrittweite durchführt. Ist  $R_1$  der Gesamtfehler bei Schrittweite  $h$ ,  $R_2$  der Gesamtfehler bei Schrittweite  $2h$ , dann ist der Fehler jedes Schritts beim Übergang von  $h$  zu  $2h$  das  $2^5 = 32$ -fache. Andererseits hat man bei  $2h$  wieder nur die halbe Schrittzahl, d.h. insgesamt versechzehnfacht sich der Fehler, also

$$R_2 \approx 2^4 R_1.$$

Ist  $\tilde{y}$  der berechnete Wert mit Schrittweite  $h$ ,  $\tilde{\tilde{y}}$  der berechnete Wert bei Schrittweite  $2h$ , dann kann man mit den berechneten Werten den Gesamtfehler durch

$$\tilde{\tilde{y}} - \tilde{y} \approx R_2 - R_1 \approx (16 - 1) \cdot R_1$$

bzw.

$$R_1 \approx \frac{1}{15} (\tilde{\tilde{y}} - \tilde{y})$$

abschätzen.

## 2.3 Runge-Kutta-Verfahren für Anfangswertprobleme 2. Ordnung

Das Runge-Kutta-Verfahren läßt sich auf Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung bzw. Vektor-Differentialgleichungen 1. Ordnung ausdehnen.

Ein Anfangswertproblem mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

entspricht dem Vektor-Anfangswert-Problem

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ f(x, y_1, y_2) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}.$$

Mit entsprechenden Näherungen für  $y_1, y_2$  bzw.  $y, y'$  ergibt sich folgendes Verfahren:

### Definition 2.3.1 (Runge-Kutta-Verfahren (Dgl. 2. Ordnung))

Die Näherungslösung des Anfangswertproblems 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad x \in [a, b],$$

wird nach Runge-Kutta folgendermaßen berechnet:

Sei

$$n \in \mathbb{N}, \quad h := \frac{b-a}{n}, \quad x_i := x_0 + i \cdot h, \quad 1 \leq i \leq n,$$

und

$$y_1 := y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y'_1 := y'_0 + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &:= h \cdot y'_0, & m_1 &:= h \cdot f(x_0, y_0, y'_0), \\ k_2 &:= h \cdot \left(y'_0 + \frac{m_1}{2}\right), & m_2 &:= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, y'_0 + \frac{m_1}{2}\right), \\ k_3 &:= h \cdot \left(y'_0 + \frac{m_2}{2}\right), & m_3 &:= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, y'_0 + \frac{m_2}{2}\right), \\ k_4 &:= h \cdot (y'_0 + m_3), & m_4 &:= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3, y'_0 + m_3). \end{aligned}$$

$y_1$  wird als Näherung von  $y(x_1)$  und  $y'_1$  als Näherung von  $y'(x_1)$  betrachtet.

Ausgehend vom Anfangswert  $(x_1, y_1)$  wird dann in  $[x_1, x_2]$  mit Runge-Kutta analog der Näherungswert  $y_2$  von  $y(x_2)$  berechnet.

Als Beispiel soll das Anfangswertproblem

$$y'' = y' + 2y, \quad y(0) = 3, y'(0) = 0, \quad x \in [0|0, 2],$$

mit der exakten Lösung

$$y(x) = e^{2x} + 2 \cdot e^{-x}$$

betrachtet werden. Für die Schrittweite wählen wir  $h = 0,05$ .

Bei jedem Schritt müssen in einem Unterschritt

$$x_1^* := x_i, \quad x_2^* := x_3^* := x_i + \frac{h}{2}, \quad x_4^* := x_i + h,$$

$$y_1^* := \tilde{y}_i, \quad y_2^* := \tilde{y}_i + \frac{k_1}{2}, \quad y_3^* := \tilde{y}_i + \frac{k_2}{2}, \quad y_4^* := \tilde{y}_i + k_3,$$

$$y_1'^* := \tilde{y}'_i, \quad y_2'^* := \tilde{y}'_i + \frac{m_1}{2}, \quad y_3'^* := \tilde{y}'_i + \frac{m_2}{2}, \quad y_4'^* := \tilde{y}'_i + m_3,$$

$$k_j := h \cdot y_j'^*, \quad 1 \leq j \leq 4, \quad K_i := \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$m_j := h \cdot f(x_j^*, y_j^*, y_j'^*), \quad 1 \leq j \leq 4, \quad \text{und} \quad M_i := \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

berechnet werden.

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + K_{i-1}$	$\tilde{y}'_i = \tilde{y}'_{i-1} + M_{i-1}$	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
0	0,000	3,000000	0,000000	3,000000	0,000000

$j$	$x_j^*$	$y_j^*$	$y_j'^*$	$f(x_j^*, y_j^*, y_j'^*)$	$k_j$	$m_j$	$K_i$	$M_i$
1	0,000	3,000000	0,000000	6,000000	0,000000	0,300000		
2	0,025	3,000000	0,150000	6,150000	0,007500	0,307500		
3	0,025	3,003750	0,153750	6,161250	0,007688	0,308063		
4	0,050	3,007688	0,308063	6,323438	0,015403	0,316172	0,007630	0,307883

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + K_{i-1}$	$\tilde{y}'_i = \tilde{y}'_{i-1} + M_{i-1}$	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
1	0,050	3,007630	0,307883	3,007630	0,307883

$j$	$x_j^*$	$y_j^*$	$y_j'^*$	$f(x_j^*, y_j^*, y_j'^*)$	$k_j$	$m_j$	$K_i$	$M_i$
1	0,050	3,007630	0,307883	6,323142	0,015394	0,316172		
2	0,075	3,015327	0,465961	6,496615	0,023298	0,324831		
3	0,075	3,019279	0,470298	6,508856	0,023515	0,325443		
4	0,100	3,031145	0,633326	6,695615	0,031666	0,334781	0,023448	0,325247

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + K_{i-1}$	$\tilde{y}'_i = \tilde{y}'_{i-1} + M_{i-1}$	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
2	0,100	3,031077	0,633130	3,031078	0,633131

$j$	$x_j^*$	$y_j^*$	$y_j'^*$	$f(x_j^*, y_j^*, y_j'^*)$	$k_j$	$m_j$	$K_i$	$M_i$
1	0,100	3,031077	0,633130	6,695285	0,031657	0,334764		
2	0,125	3,046906	0,800512	6,894324	0,040026	0,344716		
3	0,125	3,051090	0,805488	6,907669	0,040274	0,345383		
4	0,150	3,071352	0,978514	7,121217	0,048926	0,356061	0,040197	0,345171

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + K_{i-1}$	$\tilde{y}'_i = \tilde{y}'_{i-1} + M_{i-1}$	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
3	0,150	3,071274	0,978301	3,071275	0,978302

$j$	$x_j^*$	$y_j^*$	$y_j'^*$	$f(x_j^*, y_j^*, y_j'^*)$	$k_j$	$m_j$	$K_i$	$M_i$
1	0,150	3,071274	0,978301	7,120850	0,048915	0,356042		
2	0,175	3,095732	1,156322	7,347786	0,057816	0,367389		
3	0,175	3,100183	1,161996	7,362361	0,058100	0,368118		
4	0,200	3,129374	1,346419	7,605168	0,067321	0,380258	0,058011	0,367886

$i$	$x_i$	$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + K_{i-1}$	$\tilde{y}'_i = \tilde{y}'_{i-1} + M_{i-1}$	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
4	0,200	3,129286	1,346187	3,129286	1,346188

## 2.4 Mehrschrittverfahren

Das Eulersche Polygonzug-Verfahren und das Runge-Kutta-Verfahren sind sogenannte **Einschrittverfahren**, bei denen jeweils  $y_{n+1}$  nur mit Hilfe der vorhergehenden Näherung  $y_n$  berechnet wird.

Bei **Mehrschrittverfahren** werden bei jedem Schritt zur Berechnung von  $y_{n+1}$  mehrere der zuvor berechneten Werte  $y_n, y_{n-1}, \dots$  genutzt. Man geht natürlich von der Vorstellung aus, daß die Genauigkeit für  $x_{n+1}$  zunimmt, wenn man bei der Berechnung mehr Informationen ausnutzt. Allerdings hat man zum Startzeitpunkt (d.h. für die Berechnung von  $y_1$ ) nur die Anfangswertvorgabe zur Verfügung, d.h. die ersten Näherungswerte müssen mit einem Einschrittverfahren, z.B. Runge-Kutta, berechnet werden.

Wir betrachten wieder ein Anfangswert-Problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

und setzen voraus, daß es eindeutig lösbar ist.

Integration im Intervall  $[x_n, x_{n+1}]$  mit  $x_{n+1} := x_n + h$  ergibt

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Jetzt ersetzt man  $f(x, y(x))$  durch ein Interpolations-Polynom  $p(x)$  und erhält als Approximation

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x) dx. \quad (2.1)$$

Wir wählen z.B. das durch die 4 Wertepaare

$$(x_k, f(x_k, y_k)), \quad 0 \leq k \leq 3,$$

eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad 3, und zwar in der Form des Newtonschen Interpolationspolynoms, d.h. in der Form

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_3) + c_2(x - x_3)(x - x_2) + c_3(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).$$

Durch schrittweises Einsetzen der Funktionswerte  $z_k := f(x_k, y_k)$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , und Auflösen der Gleichungen unter Beachtung von  $x_k - x_{k-1} = h$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , bestimmt man die Koeffizienten:

$$x = x_3 : \quad z_3 = c_0,$$

$$x = x_2 : \quad z_2 = c_0 - c_1 \cdot h,$$

$$x = x_1 : \quad z_1 = c_0 - c_1 \cdot 2h + c_2 \cdot 2h \cdot h,$$

$$x = x_0 : \quad z_0 = c_0 - c_1 \cdot 3h + c_2 \cdot 3h \cdot 2h - c_3 \cdot 3h \cdot 2h \cdot h,$$

d.h.

$$c_0 = z_3, \quad c_1 = -\frac{z_2 - c_0}{h} = \frac{z_3 - z_2}{h},$$

$$c_2 = \frac{z_1 - c_0 + c_1 \cdot 2h}{2h^2} = \frac{z_3 - 2z_2 + z_1}{2h^2} = \frac{(z_3 - z_2) - (z_2 - z_1)}{2h^2},$$

$$c_3 = -\frac{z_0 - c_0 + c_1 \cdot 3h - c_2 \cdot 6h^2}{6h^3} = \frac{z_3 - 3z_2 + 3z_1 - z_0}{6h^3} = \frac{[(z_3 - z_2) - (z_2 - z_1)] - [(z_2 - z_1) - (z_1 - z_0)]}{6h^3}.$$

Die Ausdrücke

$$\Delta z_1 := z_1 - z_0, \quad \Delta^2 z_2 := \Delta z_2 - \Delta z_1, \quad \Delta^3 z_3 := \Delta^2 z_3 - \Delta^2 z_2$$

heißen 1., 2. bzw. 3. (Rückwärts-)Differenz. Setzt man noch  $x = x_3 + rh$  mit  $0 \leq r \leq 1$ , dann erhält man

$$x - x_3 = rh, \quad x - x_2 = (r+1)h, \quad x - x_1 = (r+2)h$$

und

$$p_3(x_3 + rh) = z_3 + r \Delta z_3 + \frac{r(r+1)}{2!} \Delta^2 z_3 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!} \Delta^3 z_3 = \sum_{k=0}^3 \binom{r+k-1}{k} \Delta^k z_3. \quad (2.2)$$

**Beispiel 2.4.1** Sind die Funktionswerte  $f(x_k) = \cosh x_k$  für  $x_0 = 0,5$ ,  $x_k = x_0 + k \cdot 0,1$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , bekannt, dann erhält man mit Hilfe folgender Tabelle

$k$	$x_k$	$y_k = \cosh x_k$	$\Delta y_k$	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	0,5	1,127626			
			0,057839		
1	0,6	1,185465		0,011865	
			0,069704		0,000697
2	0,7	1,255169		0,012562	
			0,082266		
3	0,8	1,337435			

das Interpolationspolynom

$$p_3(x_3 + rh) = 1,337435 + r \cdot 0,082266 + \frac{r(r+1)}{2!} \cdot 0,012562 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!} \cdot 0,000697$$

und z.B. für  $x = 0,86$ , d.h.  $r = 0,6$ , den Näherungswert

$$p_3(0,86) = 1,337435 + 0,6 \cdot 0,082266 + \frac{0,6 \cdot (1,6)}{2!} \cdot 0,012562 + \frac{0,6 \cdot (1,6) \cdot (2,6)}{3!} \cdot 0,000697 = 1,3931143.$$

(Der exakte Wert ist  $f(x) = \cosh 0,86 = 1,393161$ .)

Setzt man nun das Polynom aus (2.2) in (2.1) ein und integriert es nach  $x$  zwischen  $x_3$  und  $x_3 + h$  bzw.  $p_3(x_3 + rh)$  nach  $r$  zwischen 0 und 1 (mit  $dx = h dr$ ), dann ergibt sich nach Zusammenfassung gleicher  $z_k$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24} (55z_n - 59z_{n-1} + 37z_{n-2} - 9z_{n-3}) \\ &= y_n + \frac{h}{24} (55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wir betrachten nun das Polynom  $\tilde{p}_3(x)$  vom Grad 3, das  $y(x)$  an den Stellen  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$  interpoliert. Setzt man jetzt

$$x = x_4 + rh,$$

dann gilt analog

$$\tilde{p}_3(x_4 + rh) = z_4 + r \Delta z_4 + \frac{r(r+1)}{2!} \Delta^2 z_4 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!} \Delta^3 z_4.$$

Integration von  $x$  zwischen  $x_3$  und  $x_4$  bedeutet nun Integration von  $r$  zwischen  $-1$  und  $0$  und es ergibt sich

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24} (9z_{n+1} + 19z_n - 5z_{n-1} + z_{n-2}) \\ &= y_n + \frac{h}{24} (9f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Im Gegensatz zu (2.3) ist die Formel (2.4) eine implizite Formel, denn das unbekannte  $y_{n+1}$  soll mit Hilfe von  $f(x_{n+1}, y_{n+1})$  ausgerechnet werden. Um (2.4) anwenden zu können, müssen wir also auf der rechten Seite einen vermutlichen Wert vorhersagen, z.B. den Wert, der sich aus (2.3) ergibt. Kombination beider Methoden ergibt also zu den bekannten Werten  $(x_n, y_n)$ ,  $(x_{n-1}, y_{n-1})$ ,  $(x_{n-2}, y_{n-2})$ ,  $(x_{n-3}, y_{n-3})$  den neuen Wert  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  aus

$$\begin{aligned} y_{n+1}^* &= y_n + \frac{h}{24} (55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24} (9f(x_{n+1}, y_{n+1}^*) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung dient zur Schätzung eines des Wertes und die zweite Gleichung korrigiert diese Vorhersage. Das Verfahren heißt **Adams-Moulton-Methode** 4. Ordnung und hat einen Fehler von

$$\epsilon_{n+1} \approx \frac{1}{15} (y_{n+1} - y_{n+1}^*).$$

**Beispiel 2.4.2** Wir betrachten wieder unser Beispiel

$$y' = y + e^x, \quad y(0) = 1,$$

mit Lösung

$$y(x) = (x + 1) \cdot e^x$$

und berechnen für das Intervall  $[0|0,25]$  die Näherungslösung für die Schrittweite  $h = 0,05$ . Für die Startwerte benutzen wir die Ergebnisse aus dem Runge-Kutta-Verfahren.

**Schrittweite  $h = 0,05$ :**

$i$	$x_i$	Start - $y_i$	Schätz. - $y_i^*$	korr. $y_i$	$f(x_i, y_i)$	$y_i$ exakt	Fehler $\cdot 10^9$
0	0,00	1,000000000			2,000000	1,000000000	0,000
1	0,05	1,103834644			2,155106	1,103834651	7,575
2	0,10	1,215687994			2,320859	1,215688010	16,064
3	0,15	1,336109354			2,497944	1,336109379	25,549
4	0,20		1,465682550	1,465683341	2,687086	1,465683310	-3,155
5	0,25		1,605031028	1,605031864	2,889057	1,605031771	-9,321

## 2.5 Differenzengleichungen für partielle Differentialgleichungen

Wir betrachten beispielhaft die Laplacegleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

bzw. die Poisson-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y).$$

Nach dem Satz von Taylor gilt

$$\begin{aligned} u(x+h, y) &= u(x, y) + h \cdot u_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x, y) + \dots \\ u(x-h, y) &= u(x, y) - h \cdot u_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Vernachlässigt man die Terme mit  $h^3, h^4, \dots$ , dann erhält man durch Subtraktion und Addition

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &\approx \frac{1}{2h} (u(x+h, y) - u(x-h, y)), \\ u_{xx}(x, y) &\approx \frac{1}{h^2} (u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)) \end{aligned}$$

und analog

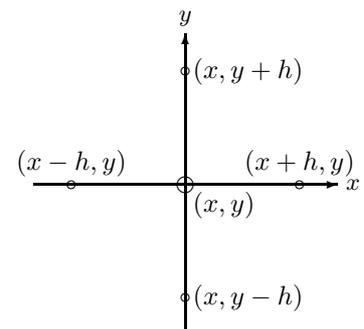
$$\begin{aligned} u_y(x, y) &\approx \frac{1}{2h} (u(x, y+h) - u(x, y-h)), \\ u_{yy}(x, y) &\approx \frac{1}{h^2} (u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Poisson-Gleichung führt zu der zugehörigen Differenzengleichung

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = h^2 \cdot f(x, y). \quad (2.6)$$

Die Gleichung (2.6) verbindet die Funktion an der Stelle  $(x, y)$  mit den Werten an den „benachbarten“ Punkten

$$(x+h, y), \quad (x, y+h), \quad (x-h, y), \quad (x, y-h).$$



Man überzieht nun das Gebiet, auf der die Funktion  $u(x, y)$  definiert sein soll, mit einem rechteckigen Gitter durch senkrechte und waagrechte Linien im Abstand  $h$ . Aus Informationen am Rande des Rechtecks (Randbedingungen für die Differentialgleichung) erhält man lineare Gleichungen für die Werte der Funktion an inneren Gitterpunkten. Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt die Werte von  $u$  an allen Gitterpunkten.

In der Praxis hat man (bei vernünftig hinreichend enger Maschendichte) ein lineares Gleichungssystem mit sehr vielen Gleichungen und Unbekannten, d.h. numerisch schon ein Speicherproblem. Allerdings hat die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems sehr viele Nullen, so daß man mit geschickter Iteration solche Schwierigkeiten in den Griff bekommen kann.

**Beispiel 2.5.1** Die 4 Seiten eines Quadrats von Seitenlänge 3 cm, das aus einem homogenen Material gefertigt ist, werden auf konstanter Temperatur gehalten, und zwar drei Seiten auf 100 und eine auf 0 Grad. Gesucht ist die Temperaturverteilung innerhalb dieses Gebiets.

Wegen der Unabhängigkeit von der Zeit reduziert sich die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = c^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy})$$

zur Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Wir wählen ein Gitternetz mit Maschenweite  $h = 1$  und erhalten außer den 4 Eckpunkten die 12 Gitterpunkte

$$P_{01}, P_{02}, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32}$$

mit den entsprechenden Temperaturen

$$u_{01} = u_{02} = u_{10} = u_{20} = u_{31} = u_{32} = 100, \quad u_{13} = u_{23} = 0,$$

und den unbekanntenen Temperaturen

$$u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}.$$

Für diese ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccrcr} -4u_{11} & + & u_{21} & + & u_{12} & & = & -200 \\ u_{11} & - & 4u_{21} & & & + & u_{22} & = & -200 \\ u_{11} & & & - & 4u_{12} & + & u_{22} & = & -100 \\ & & + & u_{21} & + & u_{12} & - & 4u_{22} & = & -100 \end{array}$$

mit der Lösung

$$u_{11} = u_{21} = 87,5, \quad u_{12} = u_{22} = 62,5.$$

(Die exakten Werte sind 88,1 bzw. 61,9.)

# Index

- Adams-Moulton-Methode, 24
- Anfangswertproblem, 2
- Differentialgleichungssystem, 3
- Differenzgleichung, 25
- Eigenfunktion, 11
- Eigenlösung, 11
- Eigenwert, 11
- Eigenwertproblem, 11
  - Sturm-Liouvillesches, 11
- Einschrittverfahren, 22
- Eulersche Knicklast, 13
- Eulersche Polygonzugverfahren, 15
- Existenz- u. Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, 5
- Existenzsatz von Peano, 3
- Fourier-Reihen, 13
- Green-sche Funktion eines Randwertproblems, 9
- Isokline, 14
- Laplace-Gleichung, 25
- Linienelement, 14
- Lipschitz
  - Bedingung, 4
  - Konstante, 4
- Mehrschrittverfahren, 22
- orthogonale Eigenfunktionen, 12
- Peano, Satz von  $\sim$ , 3
- Picard-Lindelöf, Satz von  $\sim$ , 5
- Poisson-Gleichung, 25
- Randwertproblem, 8
  - halbhomogenes lineares, 8
  - homogenes lineares, 8
  - inhomogenes lineares, 8
  - lineares, 8
- Richtungsfeld, 14
- Runge-Kutta-Verfahren, 17, 19
- schwingende Saite, 10
- Schwingungsgleichung, 7
- selbstadjungiert, 12
- Separationsansatz f. partielle Diff.-gleich., 11
- Skalarprodukt, 12
- stetige Abhängigkeit
  - v.d. Anfangswert, 6
  - v.d. Diff.-gleichung, 6
- Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem, 11