Dr. U. Freiberg zu bearbeiten bis: 31. 10. 2011

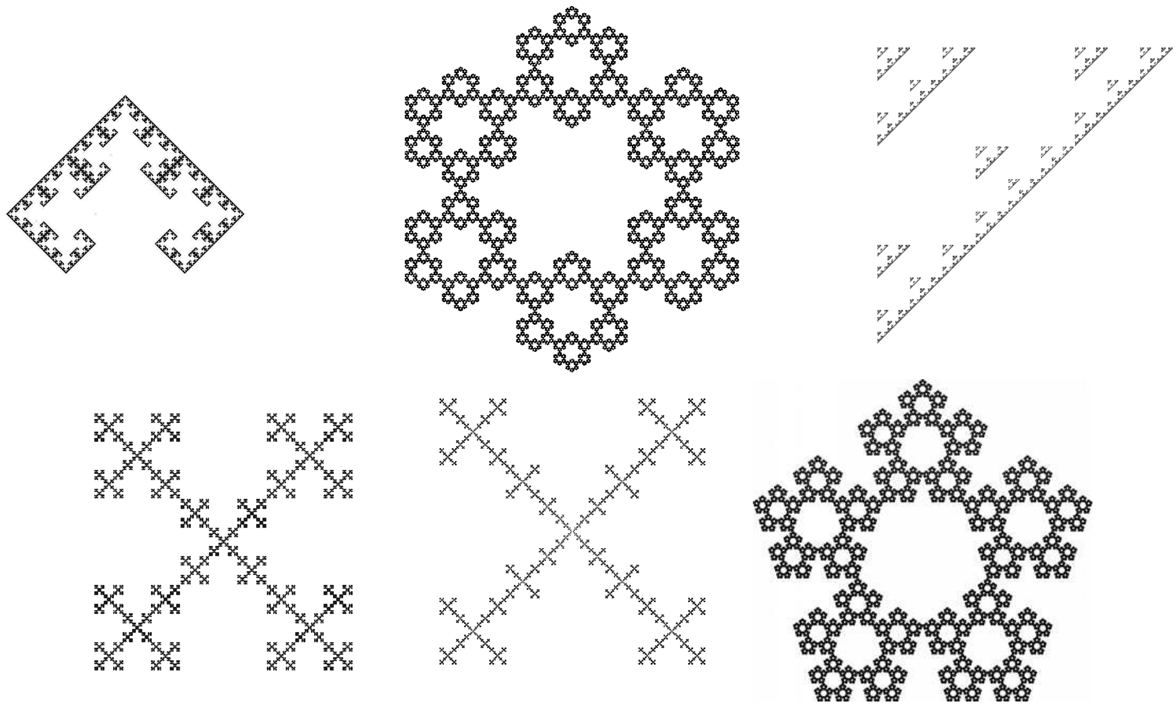
Wintersemester 2011/2012

Fraktale und Chaos

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Geben Sie IFS'e (= Iterierten Funktionen–Systeme = Familien von Abbildungen) an, die die folgenden selbstähnlichen Mengen erzeugen:

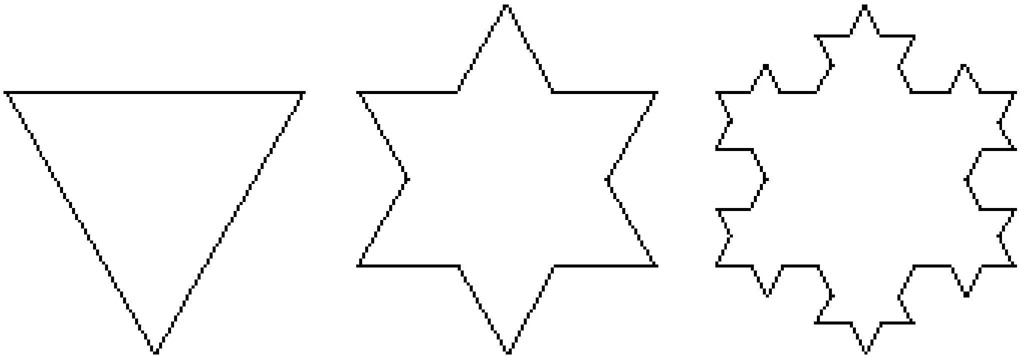


Aufgabe 2

Man finde Familien von Kontraktionen auf $[0,1]$, so dass (ähnlich wie bei der Cantormenge) Fraktale mit den Ähnlichkeits–Dimensionen von $\ln 3/\ln 5$ bzw. $\ln 4/\ln 7$ (dafür gebe man zwei verschiedene Familien an) beschrieben werden. Man gebe diese Kontraktionen jeweils explizit an.
Man finde Familien von Kontraktionen auf $\mathbb{R}^2$, so dass (ähnlich wie bei der Koch–Kurve) Fraktale mit den Ähnlichkeits–Dimensionen von $\ln 5/\ln 3$, $\ln 6/\ln 4$, $\ln 8/\ln 4$ bzw. 2 beschrieben werden. Hier genügt jeweils eine Skizze der ersten zwei Konstruktionsstufen.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Iterationsschritte zur Konstruktion einer Schneeflocke (deren Rand im Limes aus drei Kochkurven besteht). Dabei entspreche das Dreieck dem Schritt $n = 0$.



(a) Geben Sie für alle $n \geq 0$ eine geschlossene Formel für die Länge der Kurve U_n und den von der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt F_n an. Diskutieren Sie den Grenzübergang $n \to \infty$.

(b) Die Ecken des Sterns im Schritt $n = 1$ sind die Ecken eines regulären Sechsecks H. Zeigen Sie, dass H bei der Iteration nie verlassen wird. Füllt die Limesmenge die Menge H vollständig aus?

(c) Verallgemeinern Sie Aufgabenteil (a) in folgender Weise: Wir starten mit einem regulären m–Eck, dritteln jede Seite und errichten über dem mittleren Drittel ein reguläres m–Eck passender Größe (also mit gedrittelter Seitenlänge). Bestimmen Sie wieder Formeln für Umfang und Flächeninhalt für jedes Stufe als auch im Limes. Dabei werden sich eventuell überlappenden Flächen doppelt gezählt!

Aufgabe 4

Analoge Konstruktion zur vorherigen Aufgabe, allerdings im Raum: Wir starten mit einem regulären Tetraeder ($n = 0$), teilen jede Seitenfläche in 4 gleichgroße gleichseitige Dreiecke und errichten über jedem mittleren Dreieck ein reguläres Tetraeder passender Seitenlänge (siehe Bild letzte Seite).
Entwickeln Sie Formeln für die Oberflächeninhalte O_n und Volumina V_n. Wie sieht die Limesfigur aus?

Aufgabe 5*

Wir betrachten ein reguläres n–Eck K mit den Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in der Ebene, $n \geq 3$. Nun soll ein selbstähnliches Fraktal folgendermaßen gewonnen werden: Das zugehörige IFS bestehe aus n Abbildungen $S_1, \ldots, S_n$ wobei S_i eine zentrische Streckung mit Fixpunkt P_i und (einem noch zu bestimmenden) Faktor r_n ist. (Das heißt, dieser Faktor soll gleich sein für alle $i = 1, ...n$, kann aber natürlich mit n variieren.) Außerdem fordern wir, dass die Bilder $S_i(K)$ und $S_{i+1}(K)$, $i = 1, ..., n-1$ (und zusätzlich $S_1(K)$ und $S_n(K)$) sich in genau einem Punkt berühren, weitere Überlappungen seien ausgeschlossen.
Frage: Für welche n ist dies möglich, und wie groß ist dann der Kontraktionsfaktor r_n?
Hinweis: Beispiele sind das Sierpinski–Dreieck ($n = 2$), sowie die 2. und 6. Figur in Aufgabe 1 (für $n = 6$ bzw. $n = 5$). Eine einfache Überlegung zeigt, dass die geforderte Konstruktion für z.B. $n = 4$ nicht möglich ist.

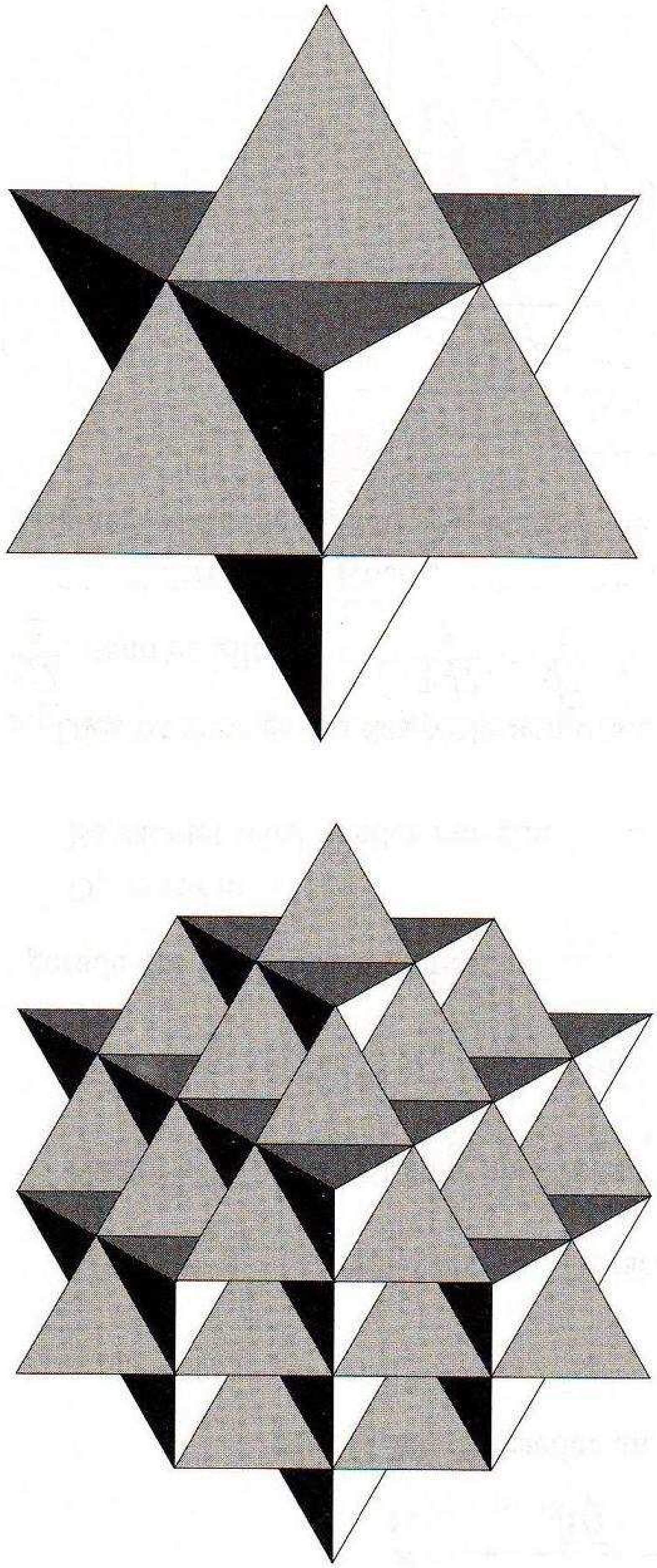


Abbildung 1: Bild zu Aufgabe 4 für $n = 1$ und $n = 2$