

Wintersemester 2011/2012

Fraktale und Chaos

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Man beweise Lemma 1.3.3 d)–f) aus der Vorlesung.

Aufgabe 2

- (a) Sei $d \in (0, 1)$ eine beliebige fixierte Zahl. Zeigen Sie, dass es ein IFS auf \mathbb{R} gibt, welches aus zwei (drei) Abbildungen besteht und als Attraktor eine Menge mit Ähnlichkeitsdimension d hat.
- (b) Finden Sie IFS'e, die aus drei (vier) Abbildungen auf \mathbb{R} bestehen und die die klassische Cantormenge als Attraktor haben.

Aufgabe 3

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s \geq 0$. Man zeige folgende Eigenschaft des s -dimensionalen Hausdorffmaßes: Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine α -Hölder-stetige Abbildung mit Hölderkonstante C , so ist

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(A).$$

Dies impliziert insbesondere

$$\dim_H f(A) \leq \frac{\dim_H A}{\alpha}.$$

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt α -Hölder-stetig, $\alpha \in (0, 1)$, falls eine Konstante C existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. α heißt dann Hölderexponent und C Hölderkonstante von f .

Aufgabe 4 z.B. beim Fernsehen

Schreiben Sie die Zeilen 0 bis 10 des Pascalschen Dreiecks nieder. Dabei soll in Zeile 0 eine Eins stehen, in Zeile 1 die Zahlen 1 und 1, in Zeile 2 die Zahlen 1, 2 und 1 etc.

- (a) Wie ist das Pascalsche Dreieck definiert? Wie berechnet man es? Wie viele Zahlen stehen in Zeile n ? Wie lautet die Zeilensumme der Zahlen in Zeile n ?
- (b) Tragen Sie die Zeilen 11 bis 14 ein, benutzen Sie jedoch statt konkreter Zahlen nur die Buchstaben G und U für „gerade“ und „ungerade“. Färben Sie das gesamte Pascalsche Dreieck, indem Sie die ungeraden Zahlen schwärzen. Was fällt auf?
- (c) Führen Sie die Aufgabe noch einmal auf dem Arbeitsblatt (nächste Seite) durch, indem Sie nur die Zellen schwarz einfärben bzw. weiß lassen. Wie ist die Färbungsregel (Stichwort: *zelluläre Automaten*)? Wie viele Zeilen muss man einfärben, um die ersten 2 (3,4) Konstruktionsstufen des Sierpinski-Dreiecks zu erkennen?
- (d) Führen Sie die Aufgabe erneut durch, jetzt aber mit einer Addition modulo 3, d.h. färben Sie eine Zelle schwarz, wenn Sie bei Division den Rest 1 oder 2 lässt; ist sie durch 3 teilbar, lassen Sie die Zelle weiß! Was erkennt man? Was vermuten Sie?

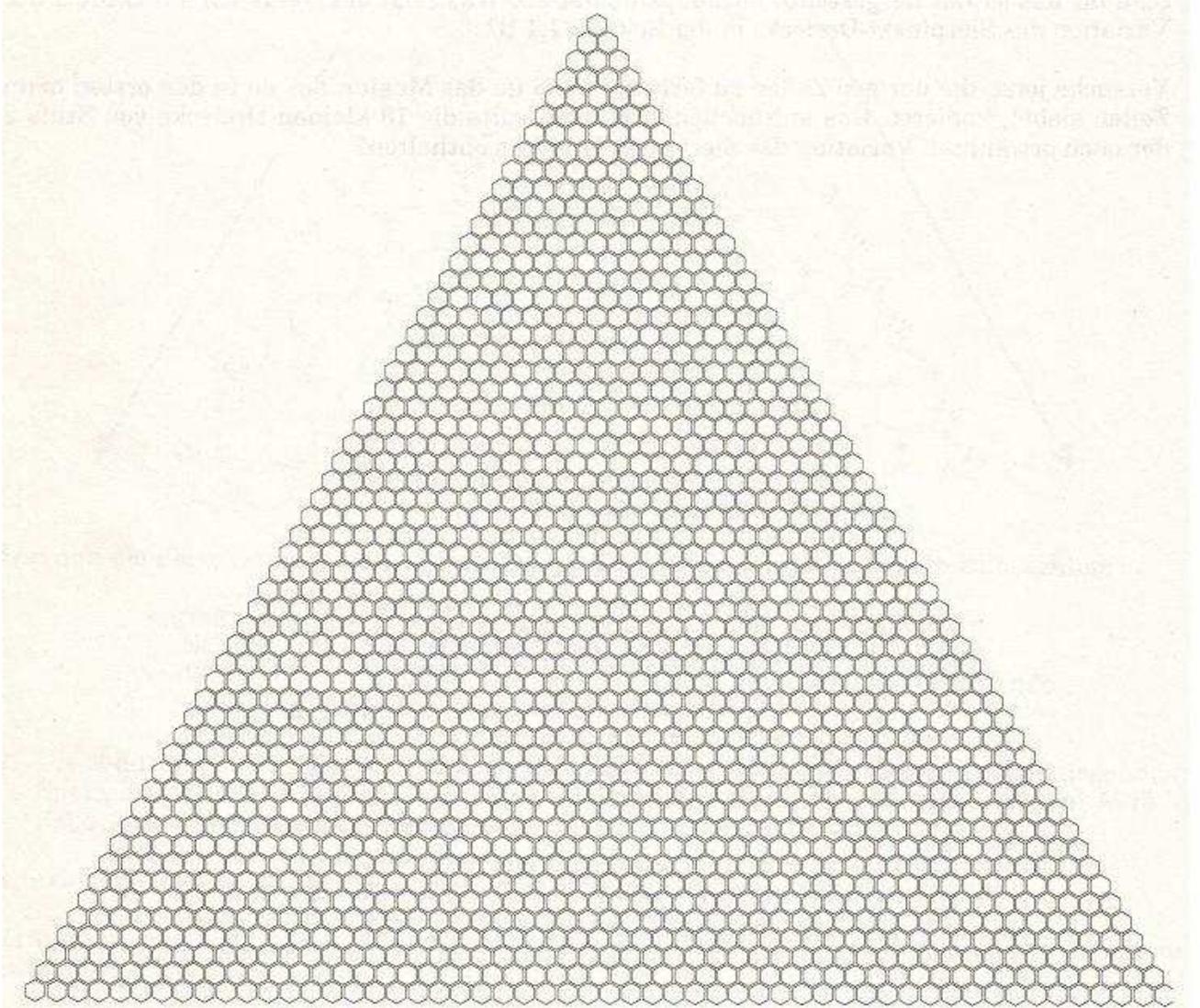


Abbildung 1: Arbeitsblatt zu Aufgabe 4