Dr. U. Freiberg

zu bearbeiten bis: 12. 12. 2011

Wintersemester 2011/2012

Fraktale und Chaos

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1–Funktion. Man zeige, dass $\dim_H f(A) \leq \dim_H A$ für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt.
Man betrachte zunächst den Fall, dass A beschränkt ist.

(b) Es sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^2$ und $A \subseteq \mathbb{R}$. Man zeige, dass $\dim_H f(A) = \dim_H A$ gilt.

Aufgabe 2

Es sei F die Menge, welche aus den Zahlen zwischen 0 und 1 besteht, deren Dezimaldarstellung nicht die Ziffer 5 enthält. Man verwende zunächst ein heuristisches Argument, um zu zeigen, dass $\dim_H F = \log 9/\log 10$ ist. Man beweise dies dann durch strenge Argumentation. Man verallgemeinere das Ergebnis.

Aufgabe 3

Man bestimme eine fraktale invariante Menge F für die sogenannte **Zeltabbildung** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := 2(1 - |2x - 1|)$. Man zeige, dass F ein Repeller für f ist und dass f chaotisch auf F ist.

Aufgabe 4

Wir betrachten die logistische Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$ mit Parameter $r \in [0,4]$, definiert durch $f(x) = rx(1-x)$. Dabei bezeichnen wir wie gehabt den Startwert mit x_0, und folgend $x_k := f^{\circ k}(x_0)$. Man zeige folgende explizite Formeln für die Punkte des Orbits:

(a) Für $r = 2$: Man wähle a so, dass $x_0 = (\mathrm{e}^a - 1)/2$. Dann gilt

$$x_k = \frac{\mathrm{e}^{2^k a} - 1}{2}, \qquad k \geq 0.$$

(b) Für $r = 4$: Man wähle $a \in [0,1)$ so, dass $x_0 = \sin^2(\pi a)$.Dann gilt

$$x_k = \sin^2(2^k \pi a), \qquad k \geq 0.$$

(c) Man zeige außerdem (im Fall $r = 4$): Für jedes $p \in \mathbb{N}$ besitzt f einen instabilen Orbit der Periode p. Außerdem besitzt f einen in $[0,1]$ dichten Orbit.
Man schreibe dazu $a = 0, a_1 a_2 \ldots$ in binärer Form.