Fachbereich 12 · Informatik
Programmiersprachen

Kurt Sieber
Achim Hennings

Algorithmen
Wintersemester 2007/08

Übungsblatt 1

Aufgabe 1
Geben Sie für $n = 1, \ldots, 8$ die kleinstmögliche und die größtmögliche Laufzeit von *MergeSort* auf einem array der Länge n an. Geben Sie dazu auch jeweils eine Beispiel-Eingabe an.

Unter der *Laufzeit* verstehen wir hier und im Folgenden stets die Anzahl der Vergleiche von Eingabeelementen.

Aufgabe 2

a. Zeigen Sie, dass *MergeSort* auf einem array der Länge 2^n genau $n\,2^{(n-1)}$ Vergleiche benötigt, falls das array schon echt aufsteigend geordnet ist.

b. Wie viele Vergleiche benötigt man, wenn das array zu Beginn echt absteigend geordnet ist?

Aufgabe 3
Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Folge verschiedener Zahlen. Ein Indexpaar (i, j) mit $i < j$ aber $a_i > a_j$ heißt ein Fehlstand (oder eine Inversion).

a. Wie groß ist die Zahl der Fehlstände maximal (bei festem n)? Geben Sie ein Beispiel an.

b. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zahl der Fehlstände und der Laufzeit von InsertionSort?

c. Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung der Anzahl aller Fehlstände, dessen Laufzeit höchstens proportional zu $n \log n$ ist.
(Hinweis: Orientieren Sie sich an der Grundstruktur von MergeSort.)

Aufgabe 4
Ein array der Länge $2n$ enthalte die verschiedenen Zahlen $a_1, \ldots, a_{2n}$. Wir können annehmen, dass es die Zahlen $\{1, \ldots, 2n\}$ sind. Zeigen Sie:

a. Sind die Teilfolgen $a' = (a_1, \ldots, a_n)$ und $a'' = (a_{n+1}, \ldots, a_{2n})$ schon geordnet, so benötigt man beim Zusammenfügen (nach MergeSort) genau dann $n + k$ $(0 \leq k \leq n - 1)$ Vergleiche, wenn gilt: a' enthält die Zahl $n + k$, a'' enthält die Zahlen $n + k + 1, \ldots, 2n$ oder umgekehrt.

b. Alle $(2n)!$ möglichen Eingaben $a_1, \ldots, a_{2n}$ seien gleich wahrscheinlich. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Zusammenfügen der sortierten Teilfolgen $n + k$ Vergleiche braucht,

$$2\binom{n-1+k}{n-1}\frac{n!n!}{(2n)!}.$$

c. Der Erwartungswert für die Anzahl der Vergleiche ist

$$2\frac{n^2}{n+1} = 2n - 2 + \frac{2}{n+1}.$$

(Hinweis: Es gilt die Summenformel für Binomialkoeffizienten $\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m}{n+1}$.)

`Besprechung: Mi 24.10.2007, 16:15 Uhr, Raum wird noch angekündigt`