Fachbereich 12 · Informatik
Programmiersprachen

Kurt Sieber
Achim Hennings

Algorithmen

Wintersemester 2007/08

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Geben Sie eine Eingabefolge der Länge $n = 2^k$ an, bei der MergeSort die maximal mögliche Laufzeit $n \log_2 n - n + 1$ benötigt. (Hinweis: Eine große Durchmischung im letzten Schritt wird erreicht, wenn links die geraden und rechts die ungeraden Zahlen stehen. Für die vorherigen Schritte sollte ähnliches gelten.)

Aufgabe 2

Geben Sie eine nicht rekursive (bottom up-) Version für das Sortierverfahren MergeSort an. Dabei können Sie eine höhere Programmiersprache oder den Pseudocode der Vorlesung verwenden. (Hinweis: Um eine aufwändige Bestimmung der Intervallgrenzen zu vermeiden, könnte man jeweils benachbarte Abschnitte der vorigen Stufe mischen und einen evtl. übrig bleibenden Abschnitt unverändert übernehmen. Man beachte, dass dabei immer nur der letzte Abschnitt eine abweichende Länge haben kann.)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie eine geschlossene Lösung für die folgenden Rekurrenzen:

a. $T(n) = 4T(n/2) + n$;

b. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$;

c. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$.

Dabei soll n nur die Zweierpotenzen 2^k durchlaufen. In welchen Θ-Klassen liegen die Lösungen? (Hinweis: Welche Rekurrenz erfüllt $S(k) := T(2^k)$?)

Aufgabe 4
Seien $f, g, h, k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie:

a. $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$.

b. $f, g \in O(h)$ (bzw. $\Omega(h)$) $\Rightarrow f + g \in O(h)$ (bzw. $\Omega(h)$) .

c. $f, g \in O(h)$ (bzw. $\Omega(h)$) $\Rightarrow f \cdot g \in O(h^2)$ (bzw. $\Omega(h^2)$) . Gilt auch $f \cdot g \in O(h)$?

d. $f \in O(g), g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$.

e. $f \in O(h), g \in \Omega(k) \Rightarrow f/g \in O(h/k)$.

Aufgabe 5

a. Zeigen Sie auf direkte Weise, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ gilt. (Hinweis: Nützlich ist, die Quotienten aufeinander folgender Glieder dieser Folge zu untersuchen.)

b. Leiten Sie daraus ab, dass $\log_2 n \in o(n)$.

c. Zeigen Sie für feste $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$: $n^k \in o(n!)$, $a^n \in o(n!)$ und $n^{n/2} \in o(n!)$.

`Besprechung: Mi 7.11.2007, 16:15 Uhr, Raum H-B 6414`