Fachbereich 12 · Informatik
Programmiersprachen

Kurt Sieber
Achim Hennings

Algorithmen
Wintersemester 2007/08

Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Sei $T(n)$ die durchschnittliche Laufzeit von Randomized Quicksort auf einem array der Länge n (das mit unterschiedlichen Zahlen besetzt ist).

a. Zeigen Sie—mit den Überlegungen aus der Vorlesung—dass

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\,\frac{2}{i+1}$$

b. Überlegen Sie sich—mit Hilfe des Rekursionsbaumes—dass für $T(n)$ andererseits folgende Rekursionsgleichung gelten muss:

$$T(n) = (n-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (T(i-1) + T(n-i))$$

Anmerkung: Um die Übereinstimmung der beiden Ansätze zu zeigen, kann man aus (b) zunächst die Rekursion $(n+1)T(n+1) - (n+2)T(n) = 2n$ herleiten und dann diese für den Term (a) bestätigen.

Aufgabe 2
Sei $T(n)$ die maximale Laufzeit von QuickSort bei Eingabelänge n. Zeigen Sie durch Induktion: $T(n) \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.

Aufgabe 3
Die nicht negative Funktion T erfülle die Bedingung

$$T(n) \leq T(\lfloor \alpha n \rfloor) + T(\lfloor \beta n \rfloor) + cn$$

für $n > 0$, wobei $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$, $c > 0$. Diese Rekursion entspricht einer unausgewogenen Teilung durch das Pivot-Element bei QuickSort. Zeigen Sie, dass $T \in O(n \log_2 n)$. (Hinweis: Ein Induktionsbeweis gelingt, wenn in dem Ansatz $d \cdot n \log_2 n$ die Konstante geeignet gewählt wird.)

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass $\log_2 n! \in \Theta(n \log_2 n)$. (Hinweis: Betrachten Sie nur Faktoren von $n!$ mit einer bestimmten Mindestgröße, z.B. $n/2$.)

`Besprechung: Mi 05.12.2007, 16:15 Uhr, Raum H-A 3102`