Der Binomische Satz sagt, daß für alle $x, y \in \mathbf{R}$ und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \ .$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n. Der Induktionsanfang für $n = 2$ ist die bekannte binomische Formel:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 \ .$$

Nehmen wir nun an wir haben die Gleichung schon für n gezeigt, und wollen sie jetzt für $n+1$ beweisen. Bevor wir mit einer etwas technischen Umformung die Gleichung beweisen erinnern wir an die Formel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

für n, k mit $1 \leqslant k \leqslant n$. Also. Konzentration!

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad \text{nach IV.} \\
&= x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und damit der Beweis abgeschlossen. □