Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 5

Dr. Klaus Schönefeld — Department Mathematik
Andrej Garanza, M. Sc. — Fakultät IV, Universität Siegen
Sommersemester 2018 — **Zu bearbeiten bis zur Übung am 29.05.2018**

Aufgabe 19

Beweisen Sie folgende alternative Formulierung des Lemma von Farkas:

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann hat das System

$$Ax \leq b$$

genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$\text{Für alle } y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } y \geq 0 \text{ und } A^T y = 0 \text{ gilt: } b^T y \geq 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass () genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ hat, wenn das System

$$A'x' = b$$

mit $A' = \begin{pmatrix} I_m, & A, & -A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m+2n)}$ eine Lösung $x' \in \mathbb{R}^{m \times (m+2n)}$ mit $x' \geq 0$ hat. I_m bezeichnet hierbei die $m \times m$-Einheitsmatrix.

Aufgabe 20

Beweisen Sie Lemma 2.15:

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $d \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\nabla \varphi(x)^T d < 0$. Dann gibt es eine Zahl $\tau > 0$, so dass $\varphi(x) > \varphi(x + td)$ für alle $t \in (0, \tau]$.

Aufgabe 21

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4(y - t)^4 \to \min!$$

$$\text{u. d. B.} \qquad \begin{pmatrix} 1 - x - y \\ 1 - x + y \\ 1 + x - y \\ 1 + x + y \end{pmatrix} \geq 0.$$

a) Für welche Werte des Parameters t erfüllt der Punkt $x^* = (1, 0)$ die KKT-Bedingungen?

b) Finden Sie anhand einer Skizze für $t = 1$ die Optimallösung und zeigen Sie, dass dieser Punkt ein KKT-Punkt ist.

Aufgabe 22

Stellen Sie die KKT-Bedingungen für das folgende Optimierungsproblem auf:

$$f(x, y) = \frac{-x + 3y - 3}{2x + y + 6} \to \min!$$

$$\text{u. d. B.} \qquad 2x + y \leq 12, \qquad 3y - x \leq 3, \qquad x, y \geq 0$$

und zeigen Sie, dass alle Punkte auf der Verbindungsstrecke von $(0, 0)$ nach $(6, 0)$ Lösungen des Problems sind.