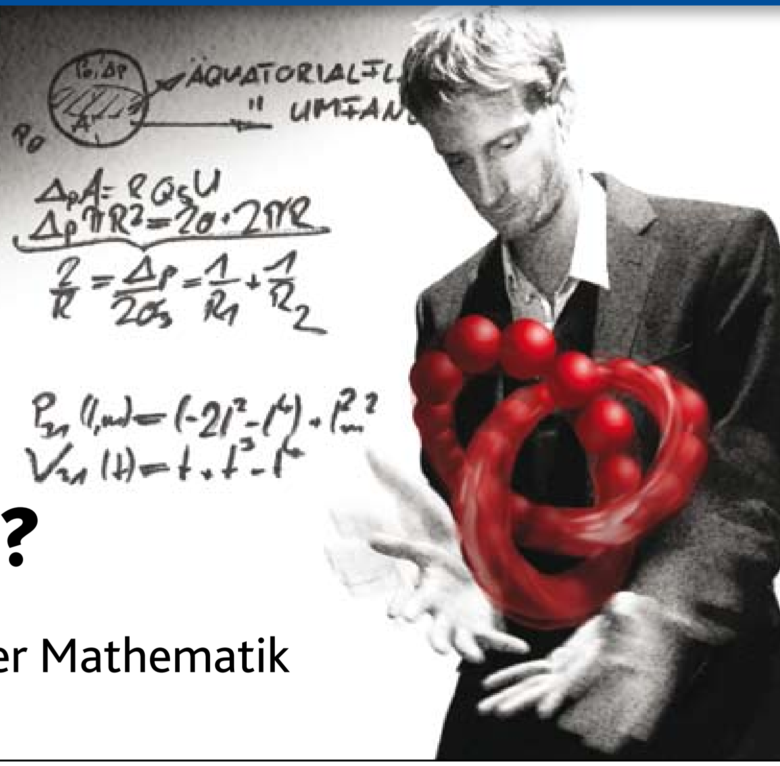
www.extrakte.uni-siegen.de

Nr. 5 - 2008

extrakte

Auszüge aus der Wissenschaft

Ein Pressedienst der UNIVERSITÄT SIEGEN



Diskret oder Kontinuierlich?

Die Wirklichkeit im Netz der Mathematik

Aus dem Inhalt

4

Axiome und Maxime
Was Ethik und Mathematik verbindet

„Die Forschung kümmert sich um die Erkenntnis, die Gesellschaft entscheidet was sie damit anfängt", so eine gängige Schutzbehauptung der Wissenschaft zur Frage nach ihrer Verantwortung. Ein Gedanke der zumindest für die Mathematik seine Berechtigung zu haben scheint. Wo sonst ließe sich ‚reine', wertneutrale Theorie so mustergültig von der Seite der zu bewertenden Anwendungen trennen - oder?

Aber nicht nur die Frage nach einer Fachethik lenkt den Bilck auf ein spannendes Wechselverhältnis, das bis dato kaum beleuchtet worden ist: Das von Ethik und Mathematik.

9

Von faulen Krediten, Wahrscheinlichkeiten und dem Risiko

Nach der Bankenkrise ist vor der Bankenkrise. Wie sich die Finanzwirtschaft mit Hilfe der Mathematik zukünftig besser gegen Risiken absichern möchte.

13

Strombörsen:
Börsen unter Strom!

Mit der Liberalisierung des Strommarktes hat sich der Handlungsspielraum der Energieversorger erweitert: An der europäischen Börse EEX können sie nun 24 Stunden am Tag Strom kaufen und verkaufen. Für das Management ergibt sich damit eine neue Wahlmöglichkeit: selber produzieren oder einkaufen. Die Kehrseite der Medaille: Die Märkte sind extrem volatil. Wer die falsche Entscheidung trifft kann in der Konkurrenz schnell ins Hintertreffen geraten. Ein unternehmerischer Drahtseilakt, der dank mathematischer Modelle kalkulierbar werden soll.

18

Mathematiklehrerbildung neu denken

Mathematik durchdringt alle Lebensbereiche; das Image des Faches aber könnte besser sein. Trocken und weltfern erscheint der Mehrheit die Welt der Zahlen. Im Jahr der Mathematik wurde viel über die Gründe räsoniert. Die Wortmeldungen in den Medien verwiesen an erster Stelle immer wieder auf den Schulunterricht als Ursache. Die Professoren Danckwerts, Beutelspacher und Nickel setzen sich seit Jahren für einen Paradigmenwechsel in der gymnasialen Lehrerausbildung ein. In einem mehrjährigen Forschungsprojekt haben sie Wege aus der Misere aufgezeigt. Das Konzept soll deutschlandweit Schule machen.

25

Vorstellungen bilden!?

Welche Anschauungsformen sind mit Mathematik verknüpft? Welchen Nutzen hat eine umfassende mathematische Bildung über den Aspekt ihrer technische Anwendbarkeit hinaus?

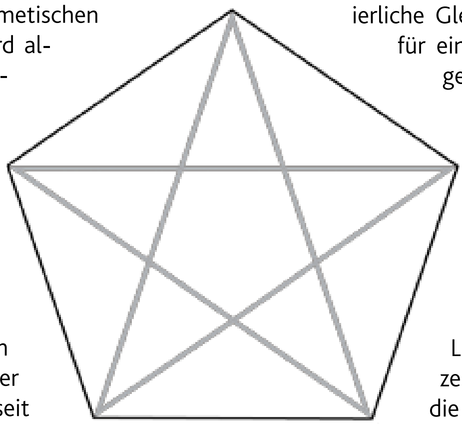
Diskret oder Kontinuierlich?

Die Unterscheidung von Diskretem (Lat. discrētus = abgesondert, getrennt) und Kontinuierlichem (Lat. continuus = zusammenhängend) ist fast so alt wie die Mathematik selbst. Bereits die griechische Antike teilt die Mathematik, die Wissenschaft von den Größen, in diesem Sinne in zwei Bereiche ein: Mathematik ist zum einen Arithmetik, die Lehre von den diskreten Größen, also den Zahlen und zum anderen Geometrie, die Lehre von den kontinuierlichen Größen, also den Figuren in der Ebene oder im dreidimensionalen Raum. Diese Auffassung, Mathematik als Lehre von den Zahlen und Figuren, bleibt bis ins ausgehende 19. Jahrhundert weitgehend bestehen und spiegelt sich noch immer im Curriculum der unteren Schulklassen.

Die Frage nach einer möglichen Beziehung von Diskretem und Kontinuierlichem hat im Laufe der Mathematikgeschichte immer wieder Probleme aufgeworfen und damit fruchtbare Entwicklungen provoziert. Klassisches Beispiel ist die Entdeckung inkommensurabler Größen in der griechischen Mathematik. Hier stieß die Grundüberzeugung der Pythagoräer, dass sich ‚alles' durch Zahlen und Zahlenverhältnisse ausdrücken ließe, auf ein scheinbar unüberwindliches Problem. Es stellte sich nämlich heraus, dass schon bei ganz einfachen geometrischen Figuren, etwa dem Quadrat oder dem regelmäßigen Fünfeck, die Seite zur Diagonale in einem Größenverhältnis steht, das nicht als ein Verhältnis ganzer Zahlen, d.h. als Bruch, ausgedrückt werden kann. In moderner Sprechweise: Erstmalig wurden irrationale Verhältnisse, die wir heute ohne Skrupel als irrationale Zahlen bezeichnen, erkundet – besonders misslich für die Pythagoräer, dass dies just an ihrem Ordenssymbol, dem Pentagramm, deutlich wurde. Der Gipfel der Ironie ist schließlich, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck in wohlbestimmtem Sinne die irrationalste aller Zahlen ist.

Für die Philosophie jedenfalls resultierte eine echte Grundlagenkrise und noch Aristoteles verbietet in seiner zweiten Analytik ausdrücklich jeglichen Übergang zwischen Geometrie und Arithmetik als ‚metabasis eis allos genos': Kein geometrischer Satz dürfe mittels Arithmetik bewiesen werden. Nicht zuletzt hier zeigt sich, dass der große Philosoph und Begründer der Logik zu wenig Gespür für die Fähigkeiten der Mathematik hatte. Glücklicherweise waren die Mathematiker weniger ängstlich, und so hatte bereits Eudoxos im 10. Buch der Elemente des Euklid eine quasi arithmetische Umgehensweise für solche inkommensurable Größen entwickelt. Geometrisches in Arithmetisches zu übersetzen und vice versa erwies sich jedenfalls immer wieder als äußerst fruchtbare Strategie. So eröffnet René Descartes mit der analytischen Geometrie die Möglichkeit, räumliche Gegebenheiten durch Zahlen auszudrücken; die ebenso einfache wie geniale Idee: Jeder Punkt im Raum wird durch drei Zahlen, die ‚cartesischen Koordinaten', eindeutig beschrieben (siehe hierzu auch die Illustration auf Seite 20). Geometrische Probleme werden so in arithmetische Gleichungen übersetzt, die durch Ausrechnen gelöst werden können. Umgekehrt ist es derselbe Descartes, der zeigt, wie sich die in ihrem Status noch immer ungeklärten Irrationalzahlen mit einem wohlbekannten

Bis ins 19. Jh: Mathematik als Lehre von den diskreten Zahlen und den kontinuierlichen Figuren geometrischen Objekt, einer Geraden, identifizieren lassen. Eine geschickte Anwendung der Strahlensätze erlaubt es ihm, das Produkt zweier Punkte durch geometrische Konstruktion auf der Geraden zu erhalten. ‚Unheimlichen' Zahlen durch Geometrisierung ein Bleiberecht in der Mathematik zu verschaffen, gelingt auch Carl Friedrich Gauß, der die cartesische Zahlengerade zu einer Ebene erweitert und diese mit den komplexen Zahlen identifiziert. Schließlich ungefähr 2000 Jahre nach Eudoxos gelingt es Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz mit ihrer ‚analysis infinitorum' einen (diskreten) Kalkül für kontinuierliche Bewegungen zu entwickeln. Mit der neuen Analysis wird die Physik Newtons überhaupt erst formulierbar – beginnt die stürmische Entwicklung der modernen Naturwissenschaften. Die Frage nach einer mathematisch akzeptablen arithmetischen Behandlung des Kontinuums wird allerdings bis weit ins 20. Jahrhundert hinein gestellt – und ist auch heute allenfalls vorläufig beantwortet.



In der Naturphilosophie lässt sich eine ähnliche Dialektik beobachten. So wird etwa der Streit, ob die Materie aus kleinen, diskreten Bausteinen, den ‚Atomen', aufgebaut oder aber wesentlich kontinuierlich sei, seit Demokrit und Aristoteles immer wieder neu entfacht. Erst Immanuel Kant weist darauf hin, dass es sich hier wahrscheinlich um eine ‚philosophische Hamsterrolle' handelt, in der sich diese ewig herum bewegen muss, wenn sie nicht lernt, über ihre eigenen Bedingungen und Voraussetzungen zu reflektieren. Die Physik geht mit dieser Frage naturgemäß hemdsärmliger um; nach Jahrzehnten einer Dominanz der überaus erfolgreichen Kontinuumstheorien im 19. Jahrhundert, hat nun der Atomismus wieder die Oberhand. Dabei sollte aber nicht übersehen werden, dass weite Bereiche auch der theoretischen Physik – etwa die Strömungsmechanik – nach wie vor von einer kontinuierlichen Materie ausgehen. Für die moderne Mathematik spielen Übergänge von diskreten (meist endlichen) und kontinuierlichen (unendlichen) Strukturen nach wie vor eine extrem wichtige Rolle; nur wenige Beispiele seien genannt. Die Analytische Zahlentheorie etwa versucht zahlentheoretische Fragen, z.B. zur Verteilung von Primzahlen, durch Anwendung von Methoden der Analysis, der Kontinuumsmathematik par excellence, zu lösen. Kontinuierliche Flächen oder Körper im Raum können in der Algebraischen Topologie durch wenige diskrete Größen, Invarianten, charakterisiert werden. In der Theorie Dynamischer Systeme untersucht man eine komplizierte (kontinuierliche) Bahn dadurch, dass man nur betrachtet, an welchen diskreten Punkten die Bahn eine festgelegte Ebene durchstößt. Schließlich ist für fast die gesamte numerische Mathematik essentiell, dass kontinuierliche Gleichungen durch ‚Diskretisierung' für einen digitalen Computer traktabel gemacht werden; eine Kurve wird durch einen Streckenzug ersetzt, eine Fläche durch viele kleine Dreiecke. So gelingt dann (vielleicht!) auch das Einfangen der (zumindest!) kontinuierlichen Welt im Netz der diskreten Mathematik.

Das Kontinuum berechenbar machen

Leider ist die Thematik von der zeitgenössischen, noch immer durch die formale Logik und Mengentheorie stark beeinflussten Mathematikphilosophie weitgehend unbeachtet geblieben. Schließlich setzt die formale Logik (einseitig) auf diskrete Zeichen, geht das grundlegende Konzept einer Menge von abgetrennten und unterschiedenen, diskreten Elementen aus. Vielleicht ist aber schon aus dem hier ganz knapp Skizzierten deutlich geworden, wie instruktiv solche Querschnitt-Themen, wie die Spannung von diskret und kontinuierlich, für ein tieferes Verständnis des nun schon mehr als drei Jahrtausende währenden Projektes der Weltkultur, genannt Mathematik, sein können.

Verfasser: Gregor Nickel

Axiome und Maxime

Was Ethik und Mathematik verbindet

Zweifellos benennt der Titel eine ungewohnte Kombination. Auch wenn sich mit dem Wörtchen ‚und' formal fast alles verbinden lässt, so scheint es doch keinerlei inhaltliche Beziehung zu geben. Zumindest entspricht dies der gängigen Meinung, ein Mathematiker dürfe eigentlich alles, außer falsch zu rechnen. Die Experimente des Mathematikers spielten sich schließlich nur in seinem eigenen Kopf und in dem seiner Kollegen ab. Und seine Erfindungen verblieben auch – so das allgemeine Urteil – im Bereich des Geistigen. In der Tat stellt die Mathematik das Musterbeispiel für eine strikte Trennung von wertneutraler ‚Theorie' und zu bewertenden ‚Anwendungen' dar. Mit diesen und ähnlichen Vorurteilen muss also derjenige rechnen, dessen Interesse dem Thema ‚Ethik und Mathematik' gilt.

Bevor man sich allerdings auf diese Weise fruchtbare Perspektiven verstellt und für eine mögliche Brisanz des Themas immunisiert, könnte man zunächst bemerken, dass die Geistesgeschichte immer wieder Zeiten eines intensiven Kontaktes von Ethik und Mathematik kennt. Über Platons (427-347 v. Chr.) Akademie etwa, deren vornehmster Lehrinhalt als die ‚Frage nach dem Guten' bezeichnet werden kann, soll gestanden haben, dass hier kein der Geometrie Unkundiger eintreten möge. Folgerichtig weisen diverse Platonische Dialoge an zentraler Stelle mathematische Erwägungen auf, so im Theaitet bei der Frage nach der Erkenntnis, im Menon bei der Frage nach der Tugend und in der Politeia bei der Frage nach der Gerechtigkeit. In der Platonischen Philosophie zeigt sich also eine innige Verbindung von Ethik und Mathematik, die im weiteren Verlauf der Geschichte immer wieder erneuert wurde. Als Zeugen seien hier nur genannt: Baruch de Spinoza (1632-1677) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) sowie für das 20. Jahrhundert Leonard Nelson (1882-1927) und Paul Lorenzen (1915-1994). Diese Bezugnahme findet ihre Berechtigung auch darin, dass sich sowohl Mathematik wie auch Ethik durch ein hohes Maß an Universalität auszeichnen und dass beide charakteristische Fähigkeiten des menschlichen Geistes darstellen. Dieser Universalität entsprechen zwei Blickrichtungen: Man kann einerseits Mathematik unter ethischer Perspektive betrachten, also eine Fachethik der Mathematik thematisieren. In der umgekehrten Richtung kann man Ethik – und hier vor allem ‚fundamentalethische' Begründungstheorien – aus mathematischer Sicht beurteilen, sei es also eine ‚etica more geometrico' entwickeln, oder aber die orientierende Rolle der Mathematik für bestehende ethische Theoriebildung analysieren. Für beide Blickrichtungen sollen im folgenden einige Aspekte angedeutet werden.

Geschlossenes System mit eigenen Regeln: Bezug zu militärischem Handeln?

Aspekte einer Ethik der Mathematik

„Mathematik, Mutter der exakten Naturwissenschaft, Großmutter der Technik, [ist] auch Erzmutter jenes Geistes (...), aus dem schließlich auch Giftgase und Kampfflieger aufgestiegen sind." Die von Robert Musil (1880-1942) in seinem Jahrhundertroman ‚Der

Mann ohne Eigenschaften' so treffend charakterisierte Kette von der mathematischen Theorie bis zur militärischen Anwendung ist allerdings nicht neu. In der Tat begleiten solche Anwendungen der Mathematik

nicht erst die Geschichte des 20. Jahrhunderts. So ist etwa die mathematische Theorie dynamischer Systeme in ihren Anfängen im 16. und 17. Jahrhundert aufs engste mit Fragen der Ballistik verknüpft. Die genaue Kenntnis der Bahnkurve einer Kanonenkugel ist eben sowohl mathematisch interessant wie militärisch reizvoll.

Aber auch die scheinbar völlig nutzlose mathematische Zahlentheorie hat mittlerweile im Rahmen der Kryptographie militärische und geheimdienstliche Relevanz, und die so harmlos klingende mathematische Spieltheorie – entwickelt mit Blick auf ökonomische Anwendungen – wurde sofort im Rahmen militärischer Strategieplanung verwendet. Und diese Liste von Beispielen ließe sich fast beliebig verlängern. Doch schon Platon nennt in der Politeia des öfteren die Mathematik in einem Atemzug mit dem Kriegswesen und einer der mathematischen Gründerväter, Archimedes (287-212 v. Chr.), kann als Archetyp in dieser Hinsicht bezeichnet werden. So war er bereits unter den Zeitgenossen berühmt für seine militärtechnischen Erfindungen. Die bekannte Szene, in der Archimedes bei der Eroberung seiner Heimatstadt Syrakus einen der eindringenden römischen Soldaten daran hindern will, seine in den Sand gezeichneten Figuren zu zerstören und von diesem kurzer Hand erschlagen wird, zeigt exemplarisch das Verhalten des Mathematikers, der zwar Rüstungsforschung betreibt, von dem real existierenden Krieg aber verschont bleiben will.

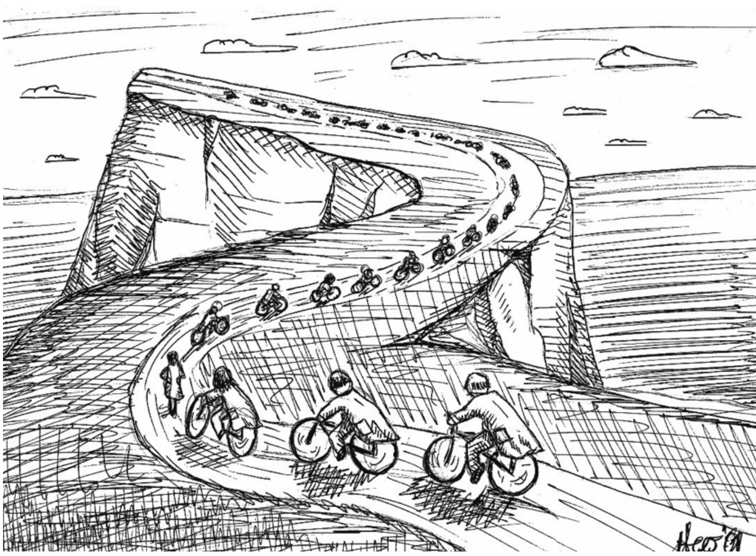
Archimedes steht also auch für das – vor allem der Mathematik mögliche – Ausblenden problematischer Anwendungen, die dennoch oft bereits die theoretische Fragerichtung bestimmt haben. Robert Musil charakterisiert diese Haltung treffend: *„In Unkenntnis dieser Gefahren lebten eigentlich nur die Mathematiker selbst und ihre Schüler, die Naturforscher, die von alledem so wenig in ihrer Seele verspüren wie Rennfahrer, die fleißig darauf los treten und nichts in der Welt bemerken als das Hinterrad ihres Vordermanns.*"

Die hier eingangs skizzierte Problematik stellt sicherlich einen Extremfall dar. Diesen teilt die Mathematik natürlich mit allen Wissenschaften, deren Ergebnisse anwendbar sind. Sie bleibt hier allerdings oft und zu Unrecht im Schatten der Naturwissenschaften. Weshalb und inwiefern die ‚reine' mathematische Theorie immer wieder das Potenzial für zuweilen ganz unerwartete militärische Anwendungen birgt, ist eine stets neu zu stellende Frage.

Der Legende nach hat der griechische Mathematiker Archimedes eine Vielzahl von Kriegsmaschinen entwickelt, um die Römer von der Eroberung seiner Heimatstadt Syrakrus abzuhalten. Wie links auf dem Kupferstich festgehalten, soll er sogar Schiffe der Römer mit Hilfe von Parabolspiegeln, die das Sonnenlicht bündelten, über große Entfernung in Brand gesteckt haben. Als die Stadt endlich fällt, weist Archimedes, der gerade dabei ist geometrische Figuren in den Sand zu zeichnen, einen eindringenden römischen Sodaten mit den Worten zurecht: „Störe meine Kreise nicht". Der erboste Soldat tötet daraufhin Archimedes mit einem Hieb seines Schwertes

Hinter den Kulissen der Gesellschaft

Richten wir nun den Blick ein wenig über das ‚Hinterrad des Vordermanns' hinaus! Schaut man hinter die Kulissen einer modernen Gesellschaft, so zeigt sich ein noch nie da gewesenes Ausmaß indirekter und direkter Mathematisierung. Es ist wohl kaum übertrieben, Mathematik in ihrer Wirkung als eine, vielleicht die ‚Leitkultur' der Moderne zu beschreiben. Dies gilt natürlich zunächst für die fast omnipräsente Technik, die nur auf der Basis naturwissenschaftlicher und damit mathematisch formulierter Theorie möglich ist. In der Tat kann man der Diagnose Robert Musils zustimmen, dass *„die Mathematik wie ein Dämon in alle Anwendungen unseres Lebens gefahren ist.*" Dies geht einher mit einer sich immer weiter öffnenden Schere zwischen der Kompliziertheit der verwendeten Tech-



Nur das Hinterrad des Vordermanns im Blick?

nik und dem mathematischem Verständnis der Anwender – sei es im Alltag, sei es in hochspezialisierten Berufen. Sprichwörtlich war schon vor 20 Jahren die mindestens ein Informatik- oder Mathematikstudium voraussetzende Aufgabe, einen handelsüblichen

Videorekorder zu programmieren. Und heutzutage ist kaum noch jemand in der Lage, die Menüsteuerung der eigenen Kaffeemaschine zu überblicken. Weitaus brisanter ist allerdings, dass vermutlich kein Arzt die in seine diagnostischen Instrumente integrierte Mathematik wirklich versteht, kein entwickelnder Ingenieur ein komplexes technisches Produkt ganz durchschaut. Die weit reichende Prägung der Lebenswelt durch den Einsatz von Computern stellt bereits eine direktere Form der Mathematisierung dar. Hier stellt sich unter anderem die Frage, welche Entscheidungen künftig durch ‚Expertensysteme' maschinell berechnet werden sollen, und wer anschließend dafür die Verantwortung übernehmen kann. Als Beispiel sei nur die bereits recht weit entwickelte, computergestützte medizinische Diagnostik genannt.

Kaum zu überschätzen, jedoch oft übersehen ist der direkte Einfluss der Mathematik auf soziale, wirtschaftliche und kulturelle Gegebenheiten der modernen Gesellschaften – ein Einfluss, der durch die derzeitige Ökonomisierung verschiedenster Lebensbereiche noch deutlich zunimmt. Gerade die Finanzmärkte hantieren mittlerweile mit einem Instrumentarium mathematisch hochkomplizierter Produkte, die offenbar – siehe Hypothekenkrise – von klassischen Bankiers nicht mehr hinreichend verstanden werden. Verfolgt man auf politischer Ebene beispielsweise die Diskussion bei Einführung des EURO oder die Debatte um Gesundheits-, Renten- und Steuersysteme, so wird deutlich, dass unter der Oberfläche des parteipolitischen Streites eine nur von wenigen – vielleicht! – verstandene Mathematik versteckt ist; dies allerdings nicht als unbeteiligte Beschreibungssprache vorgegebener Verhältnisse, sondern als Vorrat von möglichen Spielregeln für die Gesellschaft. Eine ‚Rentenformel' ist kein deskriptives Naturgesetz, sondern eine mathematisierte Verhaltensregel.

Festlegung der gesellschaftlichen Spielregeln. Wessen Interessen verpflichtet?

In der Konsequenz ergibt sich unter anderem die Gefahr eines sich stetig vergrößernden Demokratiedefizits. Anstatt des von allen gewählten Parlaments entscheiden schließlich Expertengremien, die im besten Fall ‚wissenschaftlich', nicht aber demokratisch legitimiert sind.

Insofern der Mathematik in den beiden angesprochenen Feldern – Technik und Sozio-Ökonomie – eine Schlüsselrolle zukommt, wächst ihr als institutionalisierter Wissenschaft ein entsprechendes Maß an Verantwortung zu. Der Anschluss an die Debatten der Wissenschaftsethik müsste nun auf zwei Ebenen erfolgen. Insofern die Mathematik mit ihren Resultaten eine – zuweilen kaum beachtete – die Lebenswelt prägende Rolle spielt, ist analog zu der inzwischen gut ausgearbeiteten Technikfolgenethik (etwa mit Bezug auf die Biowissenschaften) eine ethische Begleitforschung zu leisten, wie für andere Wissenschaften auch. Auf einer zweiten Ebene wäre nach dem entscheidenden methodischen Beitrag der Mathematik für die Entwicklung der modernen (Natur-) Wissenschaften zu fragen.

Die Hand auf dem Rücken der Mathematik: Unbeabsichtigte Folgen absichtsvollen Handelns

Ein mathematischer Blick auf den ethischen Diskurs

Im zweiten Teil soll nun die Aufmerksamkeit auf eine ganz andere ‚Folge' der Mathematik gerichtet werden. Spätestens mit Platon beginnt eine philosophische Tradition, die der Mathematik besondere Aufmerksamkeit widmet, sie als vorbildliche Wissenschaft beschreibt und sie – teils implizit, teils explizit – für eine Begründung und Durchführung der Ethik in Anspruch nimmt. Dies geht sofort einher mit einer expliziten Kritik an solchen Ansätzen. Platons großer Schüler Aristoteles etwa berichtet ironisch über einen von Platon angekündigten öffentlichen Vortrag über das Gute: *„Jedermann kam in der Erwartung, man würde etwas erhalten, was die Leute normalerweise als ‚gut' bezeichnen, (...) und sie waren gespannt auf eine wunderbare Art*

Frage nach dem richtigen Zug

von Glück. Aber als es sich herausstellte, dass der Vortrag von Mathematik handelte, von Zahlen, Geometrie und Astronomie, und als er dann, um alles zu übertreffen, behauptete, dass Gott die Einheit sei, erschien es allen als hoffnungslos paradox. Im Ergebnis wurde der Vortrag von einigen ausgezischt und andere waren voll der Verachtung." So bleiben die Versuche, Klarheit und Eindeutigkeit der Mathematik, aber auch die vorbildliche fairness ihres Diskurses auf Fragen der Philosophie und insbesondere der Ethik zu übertragen ein prekäres Unterfangen.

Ableitung von Normen aus der Mathematik?

Mit Bezug auf die zeitgenössische Ethik kann hierbei zuerst an Formen einer naturalisierten Ethik gedacht werden, wie sie etwa im Rahmen der Soziobiologie vorgetragen werden. Auch die immer wieder im Anschluss an die Neurowissenschaften geführten Debatten – etwa zum Freiheitsbegriff – kann man hierunter subsumieren. Insofern dabei beansprucht wird, von eigentlicher Naturwissenschaft auszugehen, hieße dies – verkürzt gesagt – eine Ableitung ethischer Normen aus Experiment und Mathematik. Dabei ist einerseits auffallend, dass der Status der Theoriebildung die zum Teil weitreichenden Interpretationen kaum deckt; oft genug erscheinen beide geradezu antiproportional. Gravierender ist noch, dass dabei in der Regel die beiden hier benannten grundlegenden methodischen Werkzeuge, Experiment und Mathematik, in naiver Weise als konkurrenzlos wirklichkeitserschließend vorausgesetzt werden. Dies scheint mir allerdings für den Versuch einer Ethik-Begründung ungenügend. Gleiches gilt – mutatis mutandis – auch für die verschiedenen Varianten eines utilitaristischen Kalküls, also die Rückführung ethischer Normen auf das ‚Prinzip des größten Glücks der größten Zahl', wie auch immer dies definiert werden mag. Hier werden, etwa im Rahmen der Spieltheorie, immerhin die nötige Mathematisierung explizit vorgeführt und auf deskriptiver Ebene wichtige Resultate, etwa zu sozialen Dilemmata erzielt.
Aber auch hier müsste die Reflexion wenigstens noch die Tragweite einer mathematischen Kodifizierung umfassen. In jedem Falle können diese Ansätze also lediglich als mehr oder weniger adäquate Deskription menschlichen Verhaltens aufgefasst werden, und als solche haben sie sicherlich ihre erhellende Funktion. Die normative Pointe einer jeden Ethik bleibt jedoch noch gänzlich unberührt.

Mathematik: Musterbeispiel des herrschaftsfreien Diskurses

Deutlich subtiler sind die verschiedenen Spielarten der Diskursethik in Bezug auf ihr Verhältnis zur Mathematik. Die Betonung liegt hier auf der Formulierung (oder gar transzendentalphilosophischen Ableitung) möglichst einsichtiger Diskursregeln, deren Einhaltung ein faires Aushandeln von Normen garantieren soll. Hier kann der mathematische Beweis als Musterbeispiel für einen herrschaftsfreien Diskurs

Auf dem Spielfeld der Logik: Widerspruchsfreies Handeln nur in den Grenzen des selbst gesetzten Regelwerkes?

dienen; bereits David Hilbert (1862-1943) hatte übrigens den Bildungswert der Mathematik vorwiegend in *„ethischer Richtung“* gesehen, insofern sie *„das Selbstvertrauen zum eigenen Verstand [weckt], die kritische Urteilskraft, welche den wahrhaft gebildeten von dem im bloßen Autoritätsglauben Befangenen unterscheidet.“* Den Extremfall einer solchen Orientierung an der Mathematik stellt die gleichzeitige Formalisierung von Logik und Ethik durch Paul Lorenzen dar. Logische Schlüsse, wie mathematische Beweise, aber auch ethische Argumentationen werden durch standardisierte Dialoge rekonstruiert. Beweisbar sind dann gerade die Sätze, für die es eine sichere Gewinnstrategie in diesen Dialogen gibt. Und auch moralische Normen sollen in einer solchen standardisierten Sprache erarbeitet werden. Aber auch weniger stark formalisierte Varianten der Verfahrens- oder Diskursethik müssten sich fragen lassen, auf welche Weise denn ein Argument tatsächlich überzeugt, soll der Diskurs nicht in einer schlichten Abstimmung oder Dezision enden. An dieser Stelle wäre der Vergleich mit einem mathematischen Beweis erhellend, es soll jedoch nur knapp konstatiert werden, dass die Beweise der Mathematik in ihrer Jahrtausende alten Geschichte zwar auf einzigartige Weise wirkten, dass jedoch die Frage, warum bzw. wie dies geschieht – allen Fortschritten der formalen Logik zum Trotz – nach wie vor unbeantwortet bleibt.

Spielerische Freiheit der Mathematik

Der Vergleich von Ethik und Mathematik, der hier mit Bezug auf die Argumentationsweise skizziert wurde, lässt sich auch mit Bezug auf die jeweilige Begriffsbildung durchführen. Für die Ethik sind im Gegensatz zur Mathematik die Begriffe vor- bzw. aufgegeben; ethische Grundbegriffe und -Normen lassen sich nicht – wie die Axiomensysteme der Mathematik – in totaler Freiheit setzen und anschließend in Theoremen und Corrollarien entfalten. Dies schon deswegen nicht, weil Freiheit und moralisches Gesetz wechselseitig aufeinander verweisen, Freiheit ohne Ethik gar nicht vernünftig denkbar ist. Ein Blick auf die spielerische Freiheit innerhalb der Mathematik könnte die Ethik allerdings davor bewahren, allzu früh bestimmte materiale Normen als unveränderlich zu zementieren. Auf der anderen Seite sind die Begriffe der Ethik – wie bereits der Begriff der Freiheit selbst – nicht endgültig definierbar, sondern in immer neuen Explikationen möglichst adäquat für die jeweilige Zeit zu entfalten. Schlichte, geistlose Identität ist für ethische Begriffe gerade nicht zu erwarten; die Kunst der Ethik besteht dann darin, nicht in ein beliebiges – und oft damit verbunden: autoritäres – Interpretationswirrwar zu verfallen. Hier ist – im Kontrast zum oben gesagten – ein gelegentlicher Blick auf den Ernst mathematischer Präzision durchaus heilsam.

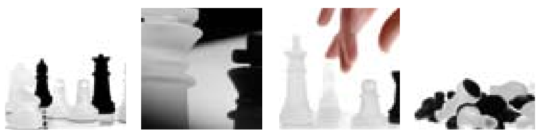
Ethik als Versuch einer vernünftigen Beurteilung menschlichen Handelns steht grundsätzlich in der Spannung zwischen allgemeiner Regel und nicht verrechenbarem Einzelfall. Während die Mathematik souverän ignorieren kann, was sich nicht nach allgemeiner Regel im Verstand (und Anschauung) konstruieren lässt, bildet die je singuläre Situation einen stets neuen, unhintergehbaren Probierstein für die Ethik. Entsprechend kann sich der mathematische Verstand gerade in der Entfaltung seiner selbst gefallen und darin seine eigentümliche Sicherheit gewinnen. Ein für die Ethik konstitutives Moment ist demgegenüber gerade die Konfrontation mit dem anderen. Moralisches Handeln erweist sich eben darin, dass der Person und Perspektive des fremden – und fremd bleibenden – Gegenüber a priori die gleiche Würde zugestanden wird, wie mir selbst. Gelingendes Handeln ließe sich dann finden, wenn Eigenes wie Fremdes gleichzeitig bestehen bleiben und einander fördern. Buchstabiert man eine Ethik vom ‚anderen her‘, so heißt dies auch, Spielräume und Mehrdeutiges offen zu lassen, Widerspruch zu riskieren und auszuhalten.

Insofern die Mathematik eine Wissenschaft ist, die die moderne Gesellschaft direkt und via Technisierung in herausragender Weise prägt, bedarf sie der begleitenden (fach)ethischen Reflexion. Unabhängig davon steht es einer Wissenschaft wie der Mathematik, die als kulturelles Unterfangen eine mindestens zweieinhalbtausendjährige Geschichte hat, wohl an, gelegentlich über diese Geschichte und ihre eigenen normativen Grundentscheidungen zu reflektieren. Eine genauere Betrachtung der zum Teil ebenso massiven Folgen der Mathematik für die ethische Theoriebildung – und die Zusammenschau beider im Spannungsfeld von Freiheit und Regel – scheinen mir zu einem vertieften Verständnis sowohl von Ethik als auch von Mathematik zu führen. Auch wenn einem Mathematiker nur das falsche Rechnen verboten sein mag – Mathematik und Ethik können dennoch gerade in ihrer grundsätzlichen Verschiedenheit viel voneinander lernen.

Verfasser: Gregor Nickel

Text und Bilder sind frei zum Wiederabdruck

Auswahl zusätzlich verfügbarer Bilder



Text, Bilder und Zusatzmaterial

www.extrakte.uni-siegen.de

Kontakt:

Prof. Dr. Gregor Nickel
Universität Siegen
Telefon: XX49 (0)271 740 3606
Telefax: XX49 (0)271 740 3635
nickel@mathematik.uni-siegen.de
Geschichte und Philosophie der Mathematik

Von faulen Krediten, Wahrscheinlichkeiten und dem Risiko

Banken rund um die Welt sind durch Fehlspekulationen in Bedrängnis geraten. Lassen sich Katastrophen dieser Art in Zukunft verhindern? Mathematische Modelle sollen helfen das Risiko kalkulierbar zu machen. Sie sind so etwas wie die Sicherungsseile der Banken im Klettersteig der Konjunkturzyklen. Wie aber funktionieren diese Modelle? Was ändert sich gegenüber der Vergangenheit?

Investiert ein Anleger in Aktien, Anleihen, Optionen oder sonstige Finanzinstrumente, sind damit unweigerlich Risiken verbunden: Eine Wahrheit die Anlegern – insbesondere US-Amerikanischen – selten so bewusst sein dürfte wie in diesen Tagen. Neben der erhofften kann sich ein Wertpapier auch in die gegensätzliche Richtung bewegen. So kann der Aktienkurs oder der Barwert einer Anleihe sinken, eine Option unausgeübt verfallen.

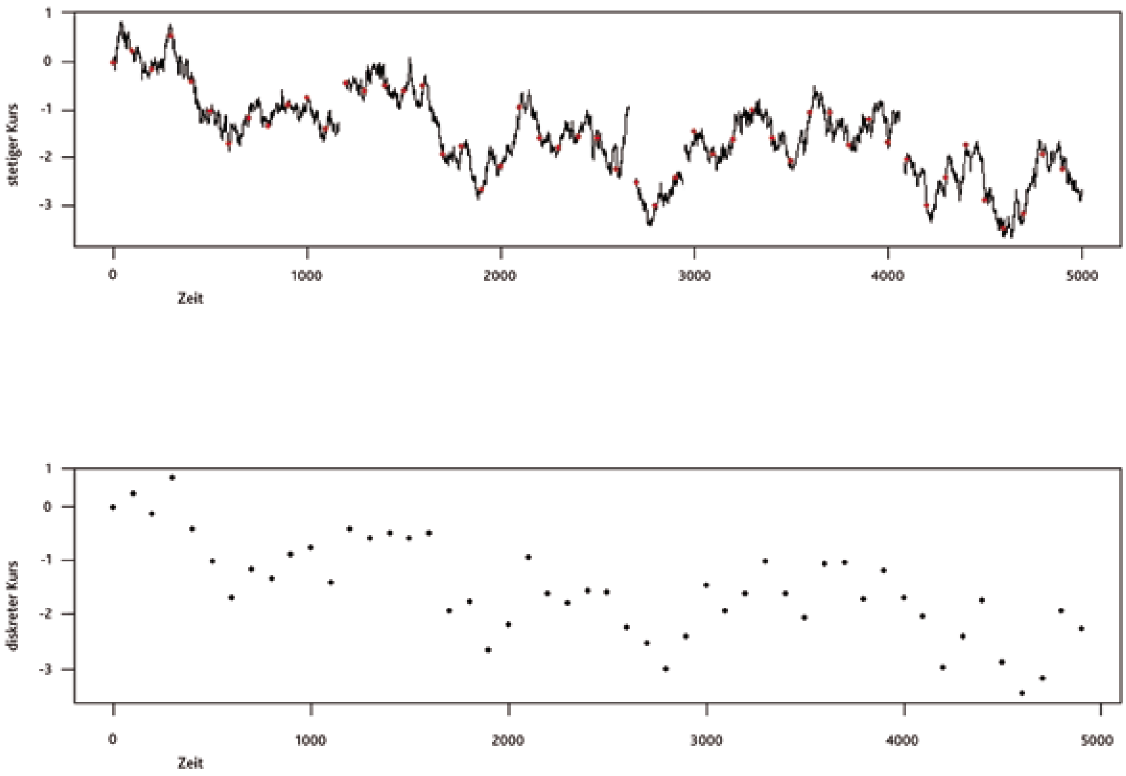
Banken: Geschäfte mit kalkulierten Risiken

Diesen Risiken sind nicht nur Privatanleger, sondern – wie zu sehen ist – auch Banken und Finanzinstitute ausgesetzt, die ebenfalls in derartige Produkte investieren. Während ein Privatanleger jedoch sein Geld nach eigenem Gutdünken einsetzen darf, unterliegen Banken diversen gesetzlichen Vorgaben. Sie sind verpflichtet, Steuerungssysteme zu entwickeln und einzusetzen, mittels derer sie das Risiko messen und beschränken können. Nun investieren Banken aber nicht nur in Aktien und Anleihen. Vielmehr nutzen sie äußerst komplexe Anlageformen. Entsprechend hoch sind die Anforderungen, die an die Zuverlässigkeit dieser Steuerungssysteme zu stellen sind. Bei ihrer Entwicklung ist die Bank an bestimmte Vorgaben gebunden, die durch Institutionen wie die Bankenaufsicht, Zentralbanken oder dem Baseler Komitee für Bankenaufsicht verabschiedet werden. Die Finanzhäuser müssen die Risiken, die ihren Portfolios anhaften, einschätzen und zu einem bestimmten Prozentsatz mit Eigenkapital unterlegen. Fallen beispielsweise in einem kurzen Zeitintervall mehrere Kredite aus, wie es zu Beginn der Subprime-Krise der Fall war, hat das für eine Bank weitreichende Folgen, sofern die Ausfälle nicht abgesichert sind. Ziel ist die Sicherstellung von Liquidität und die Gewährleistung der Geschäftsfähigkeit der Banken. Wie vor dem Hintergrund der aktuellen Geschehnisse deutlich wird, sind eingegangene Risiken in der Vergangenheit jedoch falsch beurteilt, oder schlimmstenfalls gar nicht erst erkannt worden. Damit das Prinzip des Risikocontrollings greift, ist es unerlässlich, dass die Modelle möglichst gut an die Realität angepasst und permanent weiterentwickelt werden. An Risikomodelle sind demnach zwei zentrale Forderungen zu richten: Einerseits müssen sie die Möglichkeit geben Risiken zu erkennen und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines negativen Ereignisses zu ermessen, anderseits müssen Risikomodelle Szenarien wie eine Finanzmarktkrise abbilden können.

Verschärfte Auflagen: Die Krise als ‚Eventrisiko'

Aus diesem Grund sind derzeitig nicht nur neue Regulierungsmaßnahmen der Bundesregierung in der Diskussion, sondern auch die Bankenaufsicht hat jüngst die Auflagen an das Risikomanagement der Banken weiter verschärft: Die Steuerungsinstrumente der Banken sind um das sogenannte ‚Eventrisiko' zu erweitern. Es handelt sich um das Risiko, dass sich der

Sicherheit auch im Fall. Das Risiko mit geeigneten Instrumenten begrenzen

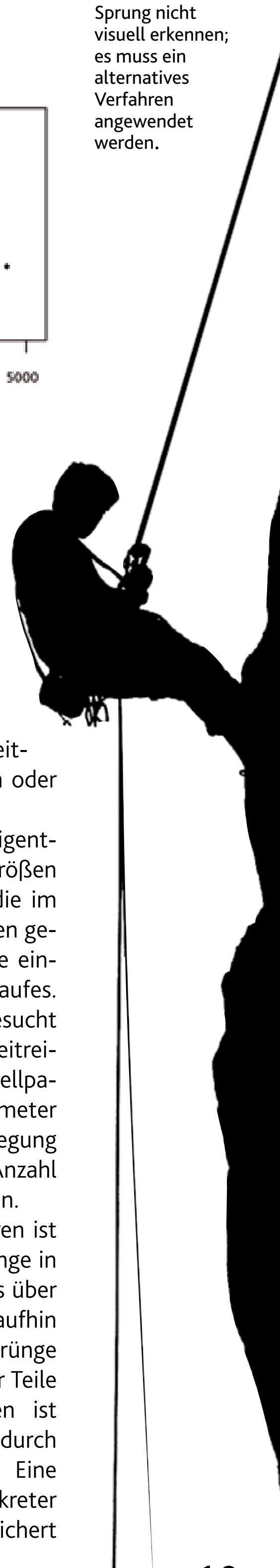


(Abb. 1)
In der oberen Abbildung ist ein simulierter Aktienkurs dargestellt, wie er in Wirklichkeit aussehen könnte. Im unteren Teil ist abgebildet, wie er gespeichert wird: Nicht mehr stetig, sondern diskret. Im Gegensatz zum oberen Bild kann man hier einen Sprung nicht visuell erkennen; es muss ein alternatives Verfahren angewendet werden.

Kurs eines Wertpapiers sprunghaft, also plötzlich und in sehr großem Ausmaß verändert, ohne dass der gesamte Markt oder Index, dem dieses Wertpapier angehört, ein ähnliches Verhalten aufweist.
Durch das bisher übliche Modell, bei dem der Kurs eines Risikofaktors mittels der sogenannten Brownsche Bewegung simuliert wird, sind diese Anforderungen nicht abgedeckt. Daher werden Banken nun aufgefordert, ein neues Risikomodell aufzusetzen oder ihr altes entsprechend zu erweitern. Besondere Schwierigkeiten bestehen nicht in der Aufstellung des Modells selbst, sondern bei dessen Parametrisierung, also der Kalibrierung des Modells anhand realer Daten. Die Frankfurter DekaBank hat sich mit diesen Fragestellungen an den Fachbereich Mathematik der Uni Siegen gewendet, die diese im darauf spezialisierten Lehrstuhl für Finanz- und Versicherungsmathematik bearbeitet hat. Ein Werkstattbericht:

Das Unwahrscheinliche als Bestandteil der Normalität erfassen

In einem ersten Schritt ging es für die Arbeitsgruppe darum ein geeignetes Modell zu entwickeln. Charakteristisch für die Brownsche Bewegung ist die Tatsache, dass Kursveränderungen ‚normalverteilt' sind (siehe hierzu auch die Erläuterungen in der Rubrik). Das heißt kleine Kursschwankungen treten mit der größten Wahrscheinlichkeit auf, sehr große Veränderungen mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit. Weiterhin sind die Kurse, die hierdurch modelliert werden, ‚stetig'. Das bedeutet, dass sehr große Kursänderungen, die innerhalb einer kurzen Zeitspanne auftreten, nicht abbildbar sind. Diese und weitere Implikationen des Normalverteilungsmodells sind mit Blick auf die Realität kritisch zu hinterfragen. In den Kursverläufen der meisten Aktien können Eigenschaften beobachtet werden, die im bisherigen Modell nicht wiedergegeben werden. Sie werden als ‚Stylized Facts' bezeichnet. Durch Ergänzung eines ‚Poisson-Prozesses' werden einige dieser Stylized Facts in das Modell integriert. Der Poisson-Prozess ist ein Prozess, bei dem der Kurs zu zufälligen Zeitpunkten um einen beliebigen Wert nach oben oder unten springt.
Nachdem das Modell steht, kommt nun die eigentliche Schwierigkeit: Die Parameter – Hilfsgrößen deren Werte konstant gehalten werden und die im Modell quasi als Stellschrauben dienen – müssen geschätzt werden. Die Schätzung erfolgt für jede einzelne Aktie auf Basis ihres historischen Kursverlaufes. Diese Schätzung soll automatisch ablaufen; gesucht wird also eine Methodik, die nach Eingabe der Zeitreihen beliebig vieler Aktien Zahlen für deren Modellparameter ausspuckt. Konkret sind das die Parameter des stetigen Teils, der durch die Brownsche Bewegung modelliert wird, sowie die durchschnittliche Anzahl der Sprünge und die Verteilung der Sprunghöhen.
Für die Anwendung statistischer Schätzverfahren ist es notwendig, jede einzelne Zeitreihe auf Sprünge in der Vergangenheit zu überprüfen, und Kenntnis über die Zeitpunkte ihres Auftretens zu erlangen. Daraufhin kann man die Zeitreihe in Sprünge und Nicht-Sprünge unterteilen und die Parameterschätzung beider Teile getrennt vornehmen. Mathematisch gesehen ist ein Sprung eine Unstetigkeitsstelle und kann durch einfaches Hinsehen sofort erkannt werden. Eine historische Zeitreihe dagegen ist eine Menge diskreter Daten, da nur endlich viele Punkte gespeichert



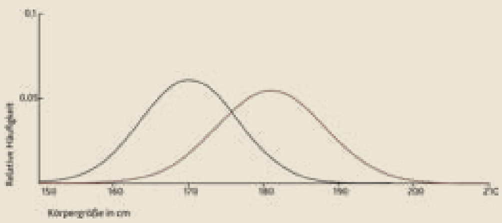
werden können Dieser Tatbestand birgt die Gefahr von Fehldeutungen in zweierlei Hinsicht: Erstens muss nicht jeder tatsächlich aufgetretene Sprung erkannt werden, weil die diskreten Daten in zu großen Abständen vorliegen. Zweitens kann der Abstand zwischen zwei Punkten wie ein Sprung erscheinen, der aber eigentlich gar keiner ist. Für vorliegende diskrete Daten eignet sich also die visuelle Sprungerkennung nicht (vgl. Abb. 1) Die Identifizierung von Sprüngen muss demnach anders funktionieren. Hierzu gibt es etliche mathematische Verfahren unterschiedlicher Komplexität, die programmiert und auf Daten angewendet wurden. Das Verfahren, welches für die gegebene Datengrundlage am besten funktionierte, wurde schließlich zur Sprungerkennung eingesetzt.

Vorbild Sturmfluten: Welche Extreme sind erwartbar?

Anhand der erkannten Sprünge lassen sich direkt Aussagen über die durchschnittliche Sprunghäufigkeit machen. Die Verteilung der Sprunghöhen zu bestimmen gestaltet sich hingegen schwieriger. Hier wurden spezielle Schätzverfahren aus dem Bereich

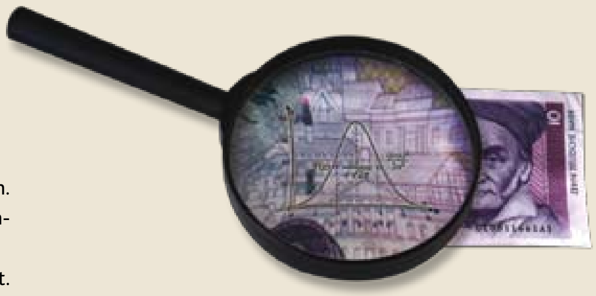
Stochastische Modellbildung

Möchte man wissen, wie sich Aktienkurse, Optionspreise oder etwa Barwerte von Anleihen in der Zukunft verhalten, wird die Mathematik zu Rate gezogen. Genauer gesagt die Teildisziplin, die sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt: Die Stochastik.
Man betrachte etwa ein einfaches Würfelexperiment. Mögliche Ergebnisse sind die Zahlen eins bis sechs, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Man spricht daher von einer Gleichverteilung. In der Realität tritt eine Gleichverteilung jedoch nur selten auf.
Untersucht man beispielsweise die Körpergröße männlicher Bundesbürger, so ist eine Körpergröße zwischen 1,75 m und 1,79 m am häufigsten vertreten. 1,80 m bis 1,84 m ist ebenfalls recht häufig, während eine Körpergröße von über 1,90 m oder unter 1,60 m sehr selten der Fall ist. Hier liegt also eine höhere Wahrscheinlichkeit in mittleren Werten, sehr große und sehr kleine Werte sind unwahrscheinlich. Eine solche Verteilung hat die Form einer Glocke und wird als Normalverteilung bezeichnet. Der Mathematiker und Astronom Karl Friedrich



Die beiden Kurven zeigen die Häufigkeitsverteilungen der Körpergrößen von Frauen (schwarz) und Männern (rot). In beiden Fällen handelt es sich um die Normalverteilung, jedoch mit unterschiedlichen Durchschnittsgrößen. Durch Drehen an dieser und anderen Stellschrauben ist die Kurve auf unterschiedliche Sachverhalte kalibrierbar.

Gauß stieß bei der Berechnung von Flächeninhalten auf die Normalverteilung, die deswegen auch als ‚Gaußsche Glockenkurve' bekannt ist.
Neben Gleich- und Normalverteilung gibt es noch eine Vielzahl anderer Verteilungen, die die unterschiedlichsten Sachverhalte abbilden. In der Stochastik geht es zunächst einmal darum, das geeignete Wahrscheinlichkeitsmodell zu einem gegebenen Sachverhalt zu finden. Beim Würfelexperiment ist offensichtlich, dass es sich um die Gleichverteilung handelt. In anderen Fällen werden historische Daten betrachtet. Man zählt wie häufig die interessierenden Ereignisse eingetreten sind, um ähnlich wie beim Würfelexperiment, ein bestimmtes Verteilungsmuster zu entdecken.



Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker; Abbildung der ‚Gauß'schen Glockenkurve' (Normalverteilung) mit Gebäuden des historischen Göttingen im Hintergrund

Zurück zum Beispiel der Körpergröße: Bei Männern kommt eine Körpergröße von etwa 1,77 m am häufigsten vor. Bei Frauen hingegen dürfte die durchschnittliche Körpergröße deutlich niedriger sein (vgl. Abbildung links). Dennoch handelt es sich in beiden Fällen um die Normalverteilung, jedoch mit unterschiedlicher Gestalt. Sowohl Durchschnittsgröße als auch die Abweichung nach links und rechts sind Parameter der Normalverteilung, die in jedem individuellen Fall angepasst werden.
Auch im Falle von Aktienkursen existieren solche Parameter, die angepasst werden müssen. Wie bei der Körpergröße auch geschieht dies anhand schon beobachteter Daten. Darüber hinaus spielen beispielsweise makroökonomische Einflussfaktoren oder Saisonalitäten eine Rolle. Mit zunehmender Anzahl der Parameter und der abgebildeten Abhängigkeiten steigt auch die Komplexität des Modells. Solche Modelle enthalten im Allgemeinen eine Vielzahl von Parametern, so dass sie nicht nur für eine einzelne Aktie Gültigkeit haben, sondern für alle Aktien eines bestimmten Marktes. Um das allgemeine Modell für eine bestimmte Aktie anzupassen, werden die Parameter für jede einzelne Aktie geschätzt und kalibriert. Je komplexer das Modell, desto schwieriger sind im Allgemeinen auch die Schätzverfahren, die verwendet werden können. Hierzu bedarf es in aller Regel eines Mathematikers, zu dessen Tätigkeitsfeldern unter anderem das Risikomanagement oder die Portfoliosteuerung in Banken gehört.

der Extremwerttheorie weiterentwickelt, die seltene und extreme Ereignissen wie zum Beispiel Sturmfluten und Börsencrashs abbilden. Die Methoden zur Erkennung von Sprüngen sowie die Schätzverfahren konnten dann in einem Prototypen umgesetzt werden. Dieser wird gefüttert mit den Zeitreihen beliebig vieler Aktien oder anderer Finanzprodukte. Als Output erhält man dann die erkannten Sprünge und die Parameterwerte jeder einzelnen Aktie.

Darüber hinaus wird für ein gesamtes Portfolio der ‚Value at Risk' (VaR) bestimmt. Diese Kennzahl beschreibt den Verlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% innerhalb eines Tages nicht überschritten wird; sie ist zur Bestimmung der Eigenkapitalquote relevant. Somit ist die Anforderung der Bankenaufsicht, das Eventrisiko in den VaR einfließen zu lassen, berücksichtigt.

In diesen Tagen sind am Markt fast täglich Sprünge zu beobachten, sowohl nach oben als auch nach unten. Aber nicht das Auftreten einzelner Ausschläge stellt das eigentliche Problem dar, sondern die hohe Korrelation: Der Kurseinbruch eines Finanzinstituts zieht weitere mit sich, was wiederum weitere Sprünge in Aktienkursen zur Folge hat. Durch die Verwendung eines Modells, wie es oben beschrieben wurde, sind solche Szenarien, wie sie aktuell auftreten, in der Risikorechnung enthalten. Einerseits lässt das Modell Unstetigkeiten zu, was beeinhaltet, dass die dadurch entstehenden Risiken auch im regulatorischen Eigenkapital enthalten sind. Andererseits ist durch die konkrete mathematische Modellgestaltung die hohe Abhängigkeit zwischen den Sprüngen innerhalb einer Branche, wie beispielsweise der Finanzbranche, darstellbar. Ob dank neuer Modelle Bankenkrisen zukünftig vermieden werden können, muss die Praxis zeigen. Zwar eröffnen die neuen Modelle neue Möglichkeiten für eine angemessene(re) Beurteilung des unternehmerischen Risikos. Zu bedenken ist allerdings, dass jedes Modell nur so gut ist, wie die Daten, die zu dessen Berechnung verwendet werden.

Verfasser: Annabelle Kehl

Text und Bilder sind frei zum Wiederabdruck

Texte, Bilder und Zusatzmaterial

www.extrakte.uni-siegen.de

Kontakt:

M.Sc. Annabelle Kehl
Universität Siegen
Telefon: XX49 (0)271 740 3575
Telefax: XX49 (0)271 740 3627
kehl@mathematik.uni-siegen.de
Forschungsgruppe Statistik, Risikoanalyse und Computing

Strombörsen:
Börsen unter Strom

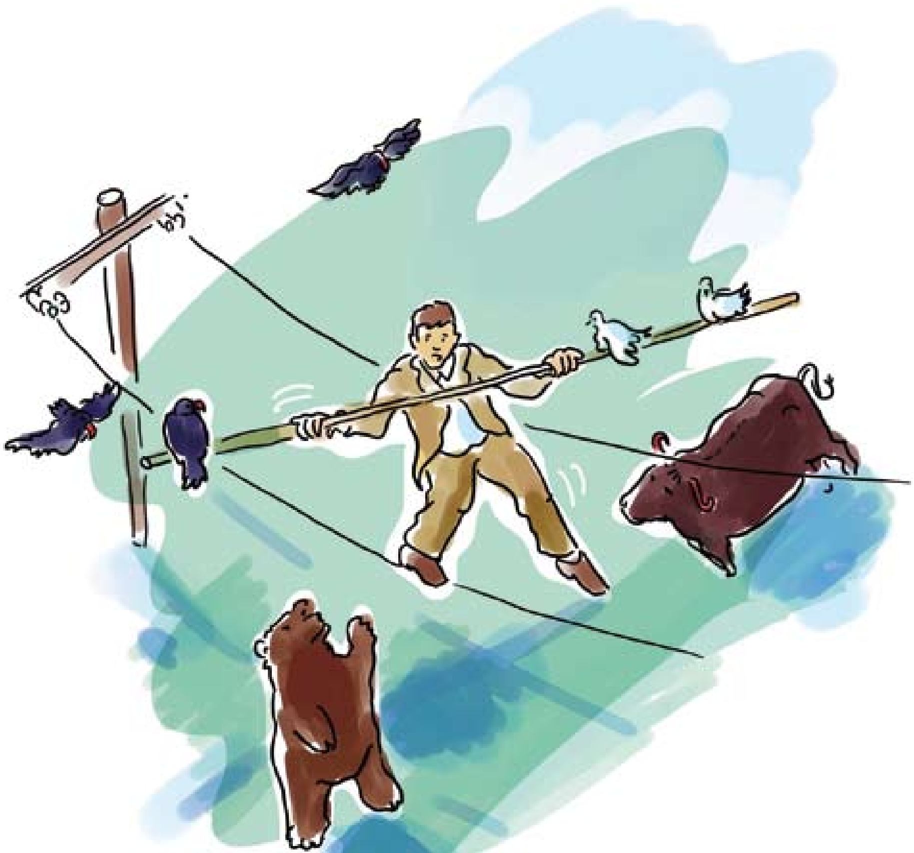
Man kennt die Situation vom Wochenmarkt: Fisch und Fleisch, Blumen und Gemüse, kurz: vergängliche Waren, die der Händler am Morgen noch zu Höchstpreisen anbietet, werden im Verlaufe des Tages immer günstiger. Knapp vor Marktschluss schlägt dann die Stunde der Schnäppchenjäger. Um nicht zu riskieren auf der Ware sitzen zu bleiben – mit der unangenehmen Folge sie am Ende möglicherweise entsorgen zu müssen – gewähren Händler Preisnachlässe je weiter sich der Geschäftstag seinem Ende entgegen neigt. Dass die Preise im Laufe eines Tages sinken wirkt keineswegs ungewöhnlich; undenkbar scheint demgegenüber allerdings ein Szenario, bei dem der Händler den Kunden die Ware nicht nur billiger überlässt, sondern sogar noch dafür bezahlt, dass sie ihm abgenommen wird. Und doch gibt es einen Markt, dessen Realität auch dies ist.

Damit nicht genug. Der Markt, von dem hier die Rede ist, überrascht mit weiteren erstaunlichen Eigentümlichkeiten: So ist man dort bisweilen mit der Situation konfrontiert, dass in einem Moment die Warenlager prall gefüllt, im nächsten Augenblick aber weite Teile der Regale leer geräumt sind. Dieser Markt kennt keinen Feierabend. Er hat auch nachts geöffnet; dann gibt es die Ware fast zum Nulltarif. Und auch am Wochenende erlebt man Preise wie im Schlussverkauf. Warm anziehen muss man sich jedoch im Winter; dann verlangen die Händler deutlich mehr als im Sommer.

Was ist das für ein Markt, dessen Preise an einem Tag mehr Kapriolen schlagen, als der DAX – selbst in diesen unsicheren Zeiten – im ganzen Jahr? Und noch wichtiger: Wie kann man als Anbieter oder Käufer auf einem solchen Markt überleben? Denn: verknappt sich plötzlich das Angebot, wird das gewöhnliche Alltagsprodukt zur echten Luxusware; in kürzester Zeit schießen die Preise in astronomische Höhen.

Störung oder Normalität?

Vor Prof. Dr. Alfred Müller von der Universität Siegen liegt ein Blatt Papier, das übersät ist mit scharf gezackten Linien. Ein flüchtiger Blick auf den Kurvenverlauf könnte den Eindruck erwecken, Müller sei vertieft in die Betrachtung eines Elektrokardiogramms, eines EKGs. Zwar befindet sich der Professor im ehemaligen Jung-Stilling Krankenhaus der Stadt; seinen Doktor hat Müller jedoch in Mathematik und nicht in Medizin gemacht. Und das Gebäude – inzwischen umgetauft auf den Namen der Begründerin der modernen Algebra, Emmy Noether – beherbergt heute kein Krankenhaus mehr, sondern die Fachbereiche Physik und Mathematik der Universität Siegen. Folgerichtig handelt es sich bei den Strichen auf dem Ausdruck auch nicht um die Aufzeichnung von Herzströmen. Zum Glück möchte man bei genauerem Hinsehen



Drahtseilakt: Handel an der europäischen Strombörse

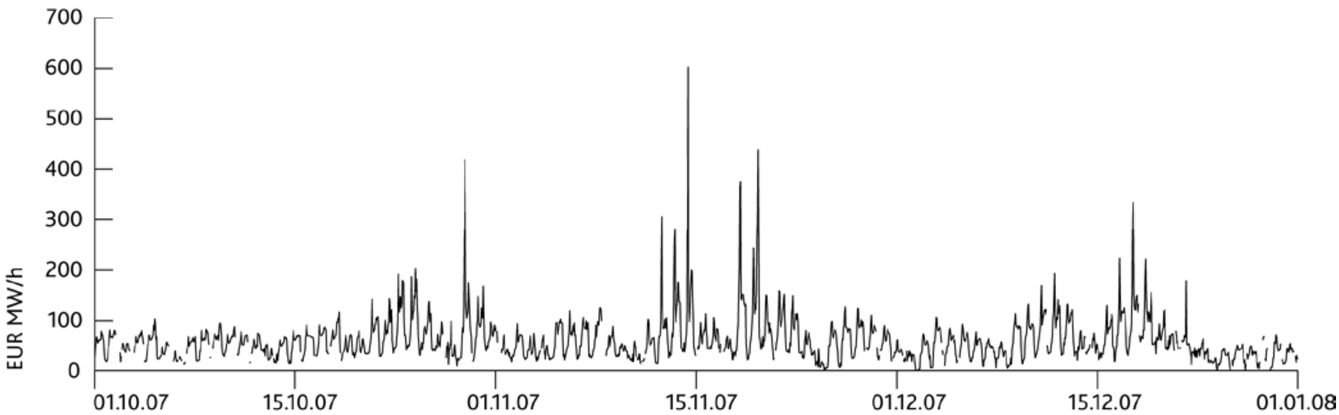


Abb. 1: Kursnotierungen für Strom an der EEX im Zeitraum von drei Monaten

fast sagen. Denn im Gegensatz zu einem EKG kann von Gleichklang und Regelmäßigkeit bei den Linien dieses Charts keine Rede sein: Berg und Tal alternieren so unregelmäßig, dass, handelte es sich um einen Patienten, man auf heftigste Herzrhythmusstörungen schließen müsste.

Die Lösung des Rätsels gibt Müller selbst: „Die Graphik zeigt die Preise für eine Megawattstunde Strom, so wie sie an der europäischen Börse für den Stromhandel letztes Jahr im Zeitraum Oktober bis Dezember notiert worden sind.“ Obwohl also kein Kardiologe liest der Finanzmathematiker Müller doch in den Linienverläufen, wie der Arzt im EKG (vgl. Abb. 1). Und wie dieser ist auch der Finanzmathematiker besonders an den hohen Spitzenwerten und den ungewöhnlichen Schwankungsbreiten im Kurvenverlauf interessiert – wenngleich auch solche Ausschläge in Müllers Metier keineswegs so untypisch sind, wie in der Medizin.

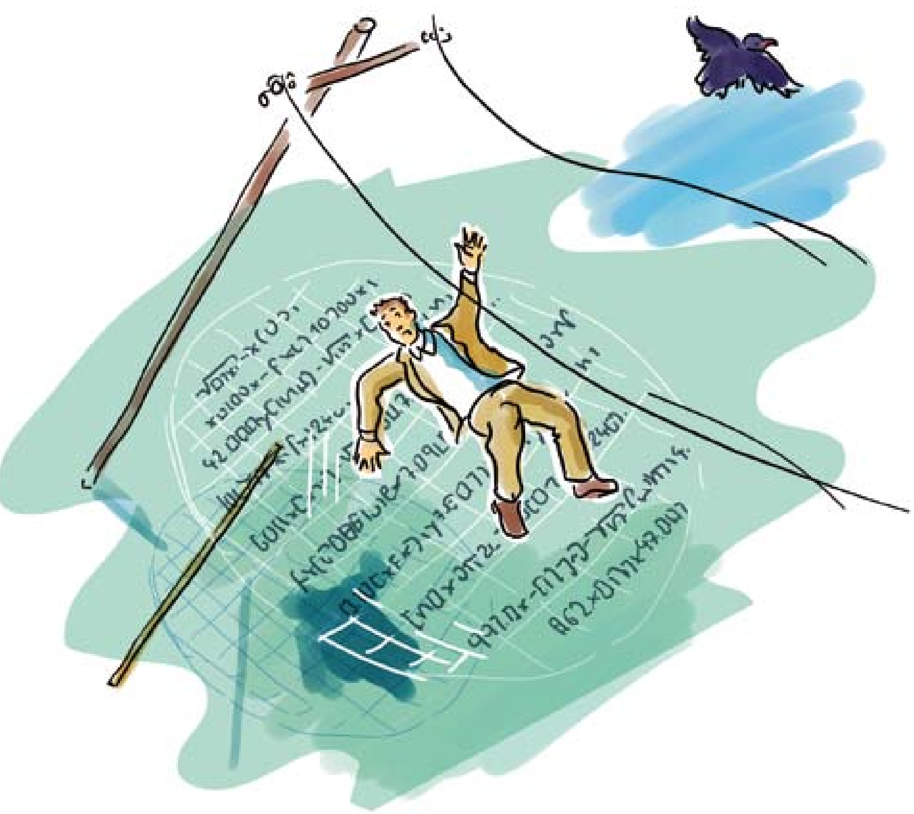
Stürmische See nach Jahren der Ruhe

Dass die Strompreise sich in einer solchen Dynamik auf und ab bewegen, war allerdings nicht immer so. Noch vor wenigen Jahren gab es keinen Handel mit Elektrizität. In den Zeiten der regionalen Monopole waren dank garantierter Preise und Abnahmepflichten die Gewinn- und Mengenrisiken für die Anbieter gering. Mit der Liberalisierung des Strommarktes im Jahr 2000 gehören die ruhigen Tage jedoch der Vergangenheit an. Strom ist zum handelbaren Gut geworden. Auf jeder einzelnen Prozessstufe der Energieversorgung – Erzeugung, Übertragung, Verteilung, Angebot – sind neue Teilnehmer in den Markt eingestiegen. Die Einführung des Wettbewerbs hat die Jagd nach den günstigsten Preisen eröffnet – weniger auf Seiten der Endverbraucher als vielmehr auf Seiten der Versorger selbst. Diese gleichen nicht nur Über- und Unterkapazitäten über den Kauf und Verkauf von Strom aus, sondern geben, wenn dort die Erzeugung zu einem bestimmten Zeitpunkt günstiger ist als im eigenen Haus, die Stromproduktion auch schon mal bei der Konkurrenz in Auftrag – oder betätigen sich, wie im Fall der reinen Stromhandelsunternehmen generell nur noch als Zwischenhändler, die ihre Gewinne über den Ein- und Verkauf von Elektrizität erwirtschaften.

Der Strom wird in Deutschland auch an einer Börse gehandelt, – der European Energy Exchange (EEX) in Leipzig. Aufgrund der Eigenheiten des Produktes ist das Geschäft mit der Energie aus der Dose aber schwer kalkulierbar. Im Gegensatz zu anderen Handelsgütern lässt sich Strom nämlich zum einen nicht Speichern, zum anderen lässt sich die Produktionsmenge auch nicht von einem auf den anderen Augenblick an die Nachfrage anpassen.
Technisch sowieso fast unmöglich, kostet es viel Geld ein Atomkraftwerk über Nacht abzuschalten. Wenn dann noch Sonntag morgens um sechs Uhr in der Frühe, zu einer Zeit in der fast niemand Strom braucht, eine starke Brise weht und sich die Windräder im ganzen Land drehen, entstehen Überkapazitäten. Diese müssen sekundengleich durch Umverteilungsmaßnahmen im europäischen

Mathematik als Sicherungsnetz

Netzwerk aufgefangen und wieder abgebaut werden. So kann es eben auch zu solch einzigartigen Phänomenen wie den eingangs beschriebenen negativen Preisen kommen. Einer Situation, in der die Erzeuger anderen Geld dafür geben, dass diese ihnen das Zuviel an Strom abnehmen.
Der Strompreis wie er an der EEX notiert wird ist demnach von vielen Faktoren abhängig. Infolge der Nachfrageschwankungen eben sowohl von der Tageszeit



als auch von der Jahreszeit. Auf der Angebotsseite ergeben sich Schwankungen unter anderem in Abhängigkeit vom Wettergeschehen – scheint die Sonne oder weht der Wind; wenn ja, wie stark – sowie von der Entwicklung der Rohstoffpreise; hier insbesondere dem Öl- und dem daran gekoppelten Gaspreis.

Während die Preise für Strom im Großhandel also eine hohe Variabilität aufweisen, sind sie für die Endverbraucher über längere Zeiträume fixiert. Für die Versorger, die sich vertraglich verpflichten ihren Kunden entsprechend der Bedarfslage – Stichwort Versorgungssicherheit – Strom zu Festpreisen zu liefern, stellt die Schwankungsbreite des EEX-Preises eine nicht unerhebliche Herausforderung dar. Die Stromkonzerne müssen ihr Verhalten auf die zu erwartenden zukünftigen Preise ausrichten.

Jede Entscheidung hat ihren Preis

Ein Ziel des Managements besteht naturgemäß darin, die Differenz zwischen Aufwand und Ertrag – also zwischen durchschnittlichen Einkaufs- bzw. Herstellungskosten und durchschnittlichen Verkaufspreisen – möglichst groß zu halten. In einem liberalisierten Strommarkt stellt das die Entscheidungsträger vor völlig neue Herausforderungen. Bei einer unternehmerischen Entscheidung wie z.B. dem Bau eines neuen Gaskraftwerkes muss man nun nicht nur die Höhe der zu erwartenden Nachfrage der Stromkunden, und den zu erzielenden Preis berücksichtigen, sondern man muss auch die neue Wahlmöglichkeit berücksichtigen, dass man zusätzlichen Strombedarf ja auch an der Börse kaufen, und auf den Bau eines eigenen Kraftwerkes verzichten könnte. Der Bau eines neuen Kraftwerkes bekommt also dadurch den Charakter einer Option, welche sich dem Management als Wahl zwischen verschiedenen Möglichkeiten darstellt. Deshalb muss man zur Berechnung des Wertes eines neuen Kraftwerkes Methoden der Optionsbewertung benützen. Man spricht hier von so genannten ‚Realoptionen', welche die großen Energieversorger gegebenenfalls ausüben können.
Zwar erweitern Realoptionen die Handlungsmöglichkeiten des Managements. Das Grundproblem, um das sich alles dreht können sie aber auch nicht lösen. Denn auch das Ausüben von Optionen hat seinen Preis. Um beurteilen zu können, ob dieser zu hoch oder zu niedrig angesetzt ist, hängt man abermals von der Entwicklung des Strompreises im Großhandel ab. Die große Unbekannte im operativen Geschäft ist und bleibt demnach für die Versorger die unberechenbar erscheinende Strompreisentwicklung.

Reines Ratespiel?

Wie können Stromkonzerne also in so einem liberalisierten Strommarkt die Chancen und Risiken ihres Geschäftes einschätzen? Wird der Handel mit Strom zum reinen Ratespiel? „Wenn überhaupt geht es um informiertes Raten", so Müller. Dass die Konzernsteuerung ihre Entscheidungen gerne auf etwas mehr stützt, als auf den Blick in die Kristallkugel liegt nahe. Hier beginnt die Arbeit des Finanzmathematikers Prof. Dr. Alfred Müller.

Regelmäßigkeiten im Auf und Ab?

Er beschäftigt sich seit mehreren Jahren damit, den Preisverlauf am Strommarkt mathematisch zu simulieren. Kurz nach der Liberalisierung trat ein großer Stromerzeuger an Müller heran mit dem Auftrag ein geeignetes Modell zu entwickeln mittels dessen sich realistische Preiseinschätzungen vornehmen lassen. Wie lässt sich aber etwas beschreiben, sei es nun in Wort oder Zahl, das sich heute so und morgen so verhält. Grundlage für Prognosen aller Art ist das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten, von regelmäßig wiederkehrenden Mustern also. Dazu Müller: „Man braucht schon ein geübtes Auge, um solche Gesetzmäßigkeiten im Preisverlauf zu erkennen. Diese gelten nämlich leider nicht generell, sondern nur im Mittel. Die starken zufälligen Schwankungen können solche systematischen Schwankungen überdecken". Die vor Müller liegende Grafik (siehe Abbildung 2) macht anschaulich, was gemeint ist. Man sieht einen Preispfad mit den tatsächlichen Preisen für einen Monat des Jahres 2002 im Vergleich zu einem simulierten Preispfad für den gleichen Zeitraum. Bei beiden Pfaden kann man bei genauem Hinsehen erkennen, dass es ein tägliches Auf und Ab gibt, und dass auf fünf höhere Spitzen für die fünf Wochentage meist zwei weniger ausgeprägte Spitzen folgen an den beiden Tagen eines Wochenendes.

„Man braucht ein geübtes Auge um hier Regelmäßigkeiten zu entdecken"

Verhaltens-Vorbilder aus der Physik

„Man kann sich den Preis als einen Gegenstand vorstellen, der sich durch eine spezifische Verhaltensweise auszeichnet", so Müller. „Wenn man das Verhalten dieses Gegenstandes gut kennt, dann kann man Erwartungen formulieren, wie es sich in der Zukunft verhalten wird. Das unbekannte Verhaltensmuster wird dabei gerne auf dasjenige bekannter anderer Objekte zurück geführt", erklärt der Siegener Mathematiker. Diese Verhaltens-Vorbilder können aus erstaunlich sachfremden Bereichen kommen. So haben die Ökonomen Robert Merton und Myron Scholes, die für ihr berühmtes Modell zur Bewertung von Finanzderivaten Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung zukünftiger Aktienpreis machen mussten, z.B. auf das physikalische Phänomen der Brownschen Bewegung zurückgegriffen, führt Müller weiter aus. „Wie bei der Wärmebewegung von Teilchen, bewegen sich auch Kurse im Zickzack, nach einem Schema, das dem der Brownschen Bewegung sehr ähnlich ist", erklärt Müller.
Auf den Stromgroßhandel lassen sich diese Annahmen allerdings nicht übertragen. Strompreise verhalten sich anders, zum einen weil Strom als Ware nicht speicherbar ist, die Preise demnach viel stärker ausschlagen. Zum anderen weil es im Gegensatz zur Aktienbörse keinen kontinuierlichen Handel gibt, sich die Preise also auch nicht, wie im (Vor-)Bild der Teilchenbewegung zu jedem beliebigen Zeitpunkt ändern können. Bei der Bewertung von Optionen auf Aktien sind kontinuierliche Modelle wie die Brownsche Bewegung sehr beliebt, weil sie zu schönen expliziten Formeln führen wie z.B. zur Black-Scholes Formel. Für deren Herleitung wurde 1997 der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an die erwähnten Ökonomen Merton und Scholes verliehen. An Strombörsen wird aber immer nur einmal am Tag ein Preis jeweils für die Stromlieferungen des nächsten Tages festgesetzt. Deshalb werden hier – im Gegensatz zu den Modellen für den kontinuierlichen Aktienhandel – Modelle in diskreter Zeit benötigt, wie sie in der Finanzmathematik sonst selten vorkommen.

„Wir mussten bei der Modellierung daher ganz neue Wege gehen", erinnert sich Müller. Nach langjähriger Entwicklungsarbeit ist es dem Finanzmathematiker schließlich gemeinsam mit Kollegen von der Universität Karlsruhe und Experten der Firma EnBW gelungen ein Modell zu entwickeln, das es schafft, die fünf wichtigsten Eigenschaften von Preisen an Strombörsen abzubilden:

Saisonalitäten: Strompreise schwanken systematisch während eines Tages, während einer Woche und während des Jahres. Aufgrund der schwankenden Nachfrage ist der Großhandelspreis für Strom tagsüber höher als nachts, an Wochentagen höher als am Wochenende, und in Deutschland im Winter teurer als im Sommer (In Ländern wie den USA, in denen Klimaanlagen weit verbreitet sind, ist es umgekehrt. Dort ist Strom im Sommer teurer als im Winter).

Extreme Preisspitzen: Die Preisausschläge bei Strompreisen sind weit stärker als die bei anderen an Börsen gehandelten Produkten. Bei einem Durchschnittspreis von ca. 80 Euro/MWh sind durchaus mal Schwankungen zwischen 0.00 Euro/MWh (oder eben

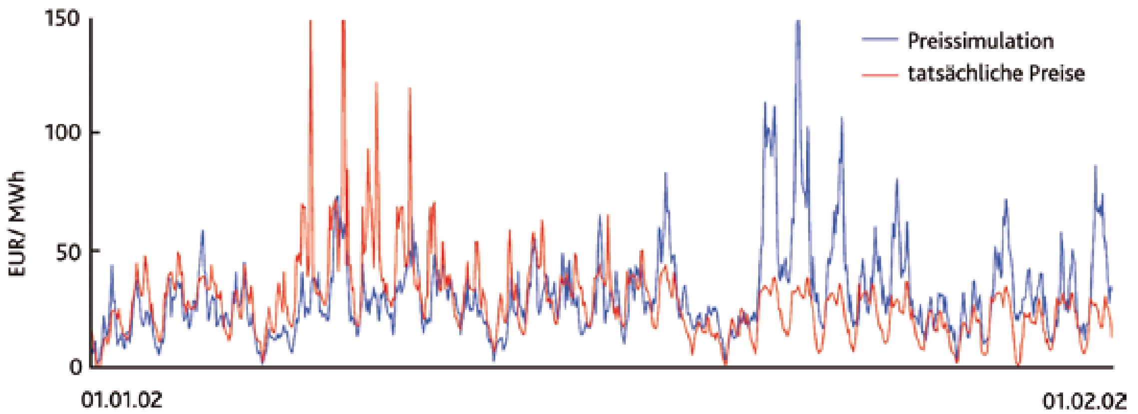


Abb. 2: Simulierte und tatsächliche Handelspreise zwischen Januar und Februar

sogar negativen Preise) und 3000 Euro/MWh zu beobachten. Diese Schwankungen lassen sich durch die übliche Normalverteilungsannahmen nicht abbilden.

Mean reversion: Mit dem Fachbegriff ‚mean reversion' bezeichnet man das Phänomen, dass die Preise langfristig einem Mittelwert zustreben. Das bedeutet, dass nach kurzfristigen Ausschlägen nach oben die Preise tendenziell wieder sinken, und nach starken Ausschlägen nach unten tendenziell wieder steigen. Bei Aktienkursen gibt es dieses Phänomen so nicht, weil sich sonst Arbitrage-Möglichkeiten ergäben, die einen sicheren Gewinn garantieren würden. Bei Strom ist es hingegen nicht möglich, einen Gewinn dadurch zu erzielen, dass man heute Strom billig kauft, und morgen wieder teuer verkauft. Dazu müsste man Strom eben speichern können.

Preisabhängige Volatilitäten: Darunter versteht man die Tatsache, dass zu Zeiten hoher Preise diese auch überproportional stark Schwanken.

Nicht-Stationarität: Ein Preisprozess wird als stationär bezeichnet, wenn er sich langfristig um einen Mittelwert einpendelt. Jedem Verbraucher ist leider wohlbekannt, dass die Strompreise tendenziell aber steigen, also nicht als stationär angenommen werden können. Im Jahre 2002 lag der durchschnittliche Börsenpreis für Strom noch unter 30 Euro/MWh. Heute liegt er dagegen aufgrund der stark gestiegenen Rohstoffpreise im Mittel bereits im Bereich von ca. 80 Euro/MWh. Diese Nicht-Stationarität scheint der oben beschriebenen mean reversion zu widersprechen. Tatsächlich treten aber auf unterschiedlichen Zeitskalen beide Phänomene gleichzeitig auf. Dies macht die Modellierung zusätzlich schwierig. Ein solches Verhalten lässt sich nur durch so genannte Mehrfaktor-Modelle mathematisch adäquat beschreiben.

Angemessene Komplexitätsreduktion

„So komplex wie nötig, so einfach wie möglich" lautet eine Forderung an wissenschaftliche Modelle. Ein Postulat, das, so Müller, gerade für die Entwicklung des von ihm und seinen Forschungspartnern so benannte SMaPS-Modell (Spot Market Price Simulation- Modell) besondere Geltung beansprucht hat. Denn: einerseits muss das Modell sehr komplex sein, um die wesentlichen Eigenschaften des Strompreises abbilden zu können. Andererseits muss es aber in gewisser Weise auch einfach sein, damit, wenn es nötig wird, die Parameter des Modells an die realen Daten der beobachteten Strompreise angepasst werden können. In einem stark von politischen Entscheidungen abhängigen Markt muss das Modell zudem flexibel genug sein, um es durch geeignete Änderung der Parameter in Übereinstimmung mit neuen Begebenheiten bringen zu können. Zu denken ist hier u.a an Änderungen im Atomausstiegsgesetz, oder aber an politische Krisen, welche die Rohstoffpreise in die Höhe schnellen lassen. Ferner muss das Modell auch einfach genug sein, damit es noch leicht auf einem Computer simuliert werden kann. Nur so ist gewährleistet, dass es auch sinnvoll in der Praxis zur Bestimmung der Preise von Realoptionen eingesetzt werden kann. Wie beispielsweise im erwähnten Fall der Bewertung eines Neubauprojektes für ein Gaskraftwerk, bei der sich das Management fragen muss, in wieweit sich eine solche Investition lohnt. Das von Prof. Müller und seinen Kollegen entwickelte SmaPS-Modell wird heute von der Firma EnBW regelmäßig für Simulationsstudien eingesetzt. Das Modell hilft dem Management sowohl zu beurteilen, ob sich neue Projekte rentieren, als auch den Wert von flexiblen Lieferverträgen für Großkunden zu ermitteln. Denn auch diese haben Optionscharakter, insofern sie es dem Kunden erlauben, mal mehr oder auch mal weniger Strom abzunehmen. Das Simulationsmodell ist in diesem Zusammenhang ein wichtiges Hilfsmittel zur Entscheidungsunterstützung, um in der Konkurrenz mit anderen großen Energieversorgern bestehen zu können.
Im Gegensatz zu den Produkten auf dem Wochenmarkt können aber auf dem Strommarkt die Endverbraucher leider noch nicht von Preisen profitieren, die sich aus einem situativen Überangebot ergeben. Es steht zu befürchten, dass der Tag noch auf sich warten lässt, an dem wir, dadurch, dass wir sonntags um 6 Uhr in der Frühe unseren Rasen mähen, Geld verdienen können.

Verfasser: Michael Hellermann / Alfred Müller

Text und Bilder sind frei zum Wiederabdruck

Text und Bilder

www.extrakte.uni-siegen.de

Kontakt:

Prof. Dr. Alfred Müller
Universität Siegen
Telefon: XX49 (0)271 740 3587
Telefax: XX49 (0)271 740 3627
mueller@mathematik.uni-siegen.de
Forschungsgruppe Statistik, Risikoanalyse und Computing

Mathematiklehrerbildung neu denken

Die Welt mit mathematischem Blick erfassen

Das Jahr der Mathematik neigt sich seinem Ende entgegen. Journalisten und Wissenschaftler haben in mehr als 3000 Artikeln, 450 Fernsehbeiträgen und 400 Radiobeiträgen unter Beweis gestellt, was wohl nur wenige noch vor einem Jahr für möglich gehalten hätten: Mathematik kann faszinieren; nicht nur das Bildungsbürgertum, sondern breite Teile der Bevölkerung haben sich anstecken lassen. Wenn Mathematik aber Neugier wecken, vielleicht sogar Begeisterung hervorrufen kann, warum war bzw. ist dann der Leumund des Faches so schlecht, fragten mit Recht viele Kolumnisten. In ihren Analysen kamen sie häufig zu einem ähnlichen Ergebnis wie die internationalen Leistungsvergleichstests: Der deutsche Schulunterricht ist schematisch, formal und alltagsfern. Die Misere beginnt in den Hochschulen: Lehramtsstudierende erhalten bis heute kaum eine fachdidaktische Ausbildung, die mit der fachwissenschaftlichen erkennbar verbunden ist. Siegener und Gießener Forscher treten seit langem für eine Neuorientierung der universitären Gymnasial-Lehrerbildung ein.
In einem Pilotprojekt haben sie aufgezeigt, wie guter Unterricht – jenseits des trockenen Vorrechnens von Musterlösungen – in Zukunft aussehen könnte.

Mathematik gehört zu den Schlüsseltechnologien unserer hochtechnisierten Welt: Ob es um die Optimierung von Transportsystemen, um Wahlprognosen, Modelle für den Klimawandel oder Fragen der Datensicherheit geht, überall ist – jenseits des bürgerlichen Rechnens – hochentwickelte Mathematik im Spiel. Und mehr noch, die Mathematik ist ein bedeutendes Kulturgut: Seit Jahrtausenden hat die Mathematik das Weltverstehen der Menschen begleitet, in besonderer Weise seit der Antike, weil sie die Perspektive der Anwendbarkeit weit überschritten und die Mathematik als argumentative Wissenschaft etabliert hat. Beide Wesenszüge – Mathematik als Schlüsseltechnologie und als Kulturgut – werden von der Öffentlichkeit kaum bemerkt. Schlimmer noch: Sie können mit Beifall rechnen, wenn Sie öffentlich bekennen, von Mathematik nichts zu verstehen und in Mathe immer schlecht gewesen zu sein. Das würden Sie im Fach Deutsch so nicht wagen…

Hieraus entsteht eine doppelte Bildungsnotwendigkeit: Zum einen brauchen wir eine ausreichende Zahl mathematisch qualifizierter Fachkräfte, zum anderen braucht es den mündigen Bürger, der sich über die Rolle der Mathematik in unserer Gesellschaft ein Urteil bilden kann. Wenn man sich nun klarmacht, dass mathematische Bildung – im Unterschied zu anderen

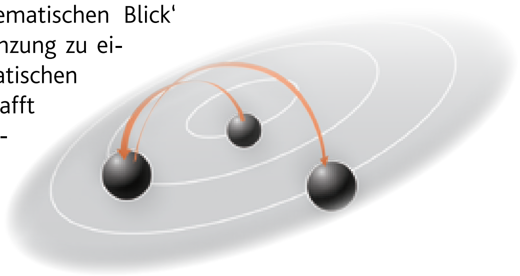
Nürnberger Trichter: „Seht liebe Leut hie steht der Mann, so alle Künst eingießen kann.“ Kupferstich aus dem 17 Jh.

Fächern wie Sprachen, Musik, Kunst oder Sport – fast ausschließlich über schulischen Unterricht vermittelt wird, so bleibt schlicht festzustellen: Mathematiklehrerinnen und -lehrer sind wichtig!

Was weiß man über den (deutschen) Mathematikunterricht? Genaueres und Repräsentatives eigentlich erst, seit internationale Vergleichsstudien einen kritischen Blick auf unseren Mathematikunterricht geworfen haben. Das ging los mit der TIMSS-Studie vor gut zehn Jahren, die – noch vor PISA – einen ersten Schock ausgelöst hat: Deutschland konnte sich nur im unteren Mittelfeld platzieren, und in einer gemeinsamen Erklärung der einschlägigen Fachverbände hieß es zu den Stärken und Schwächen unseres Mathematikunterrichts in den Sekundarstufen: *„Die Analyse der Ergebnisse zeigt, dass im Mathematikunterricht in Deutschland generell zu viel Wert gelegt wird auf das routinemäßige, manchmal gar schematische Lösen innermathematischer Standardaufgaben. Zu kurz kommen insbesondere das selbständige, aktive Problemlösen, das inhaltliche, nicht-standardisierte Argumentieren sowie das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt.*" Dieser Befund wurde durch die PISA-Ergebnisse im Kern bestätigt und ist bis heute aktuell. Unter Mathematikdidaktikern gibt es breiten Konsens, dass guter Mathematikunterricht sich insbesondere durch drei Merkmale auszeichnet: Er betont inhaltliche Grundvorstellungen (in Abgrenzung zur reinen Beherrschung von Rechenverfahren), er schärft den ‚mathematischen Blick' auf die Welt (in Abgrenzung zu einer rein innermathematischen Perspektive) und er schafft produktive Lernumgebungen zur eigenaktiven Konstruktion des Wissens (in Abgrenzung zur reinen Instruktion durch die wissende Lehrperson). Ein solcher Mathematikunterricht braucht geeignete Lehrerinnen und Lehrer. Und wir halten – wieder in Übereinstimmung mit dem Stand der mathematikdidaktischen Diskussion – fest: Gute Mathematiklehrer(-innen) haben eine positive, aktive Beziehung zur Mathematik und können:

- den Bildungswert der Mathematik ermessen,
- mit Schulmathematik kompetent umgehen und
- mathematische Lernprozesse unterstützen.

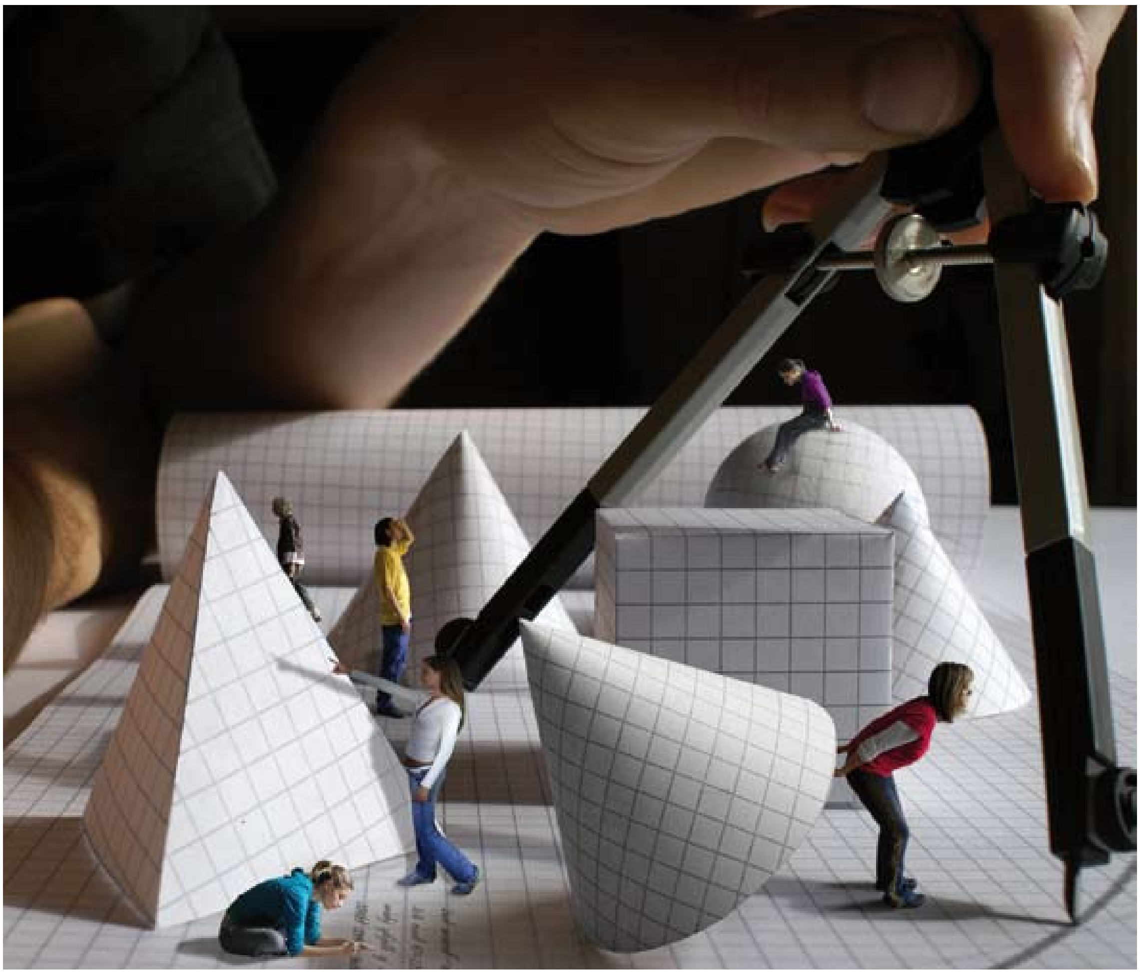
Eine gute Lehrerausbildung sollte dieses Kompetenzprofil im Blick haben und den Studierenden geeignete Angebote machen.



Auf unterschiedlichen Umlaufbahnen? Distanzen zwischen Schülern, Lehrern und Wissenschaftlern überwinden

‚Mathematik Neu Denken' – Ein Projekt zur Innovation der Lehrerbildung

Ein neuralgischer Punkt der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik ist die Ausbildung der angehenden Gymnasiallehrer. Diese werden traditionell



Mathematik! Und der Rest der Welt?

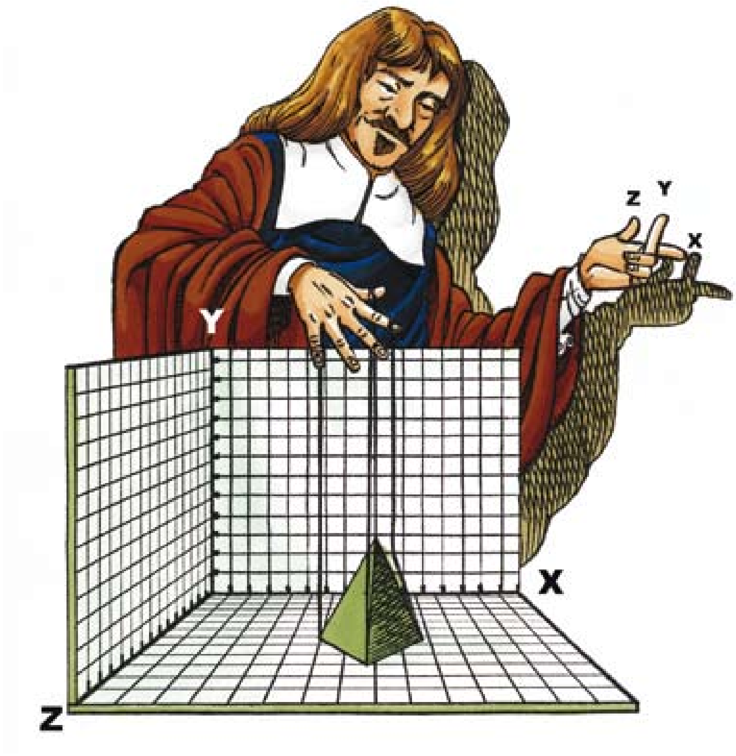
von Anfang an zusammen mit den BA/ MA – (früher Diplom-) Studierenden ausgebildet.

Änderungsbedarf: Es ist lange bekannt, dass das Selbstverständnis des Mathematiklehrers vorrangig durch sein Verhältnis zur Fachwissenschaft Mathematik bestimmt ist. In einer vielbeachteten empirischen Studie über Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik aus dem Jahre 2002 konnte belegt werden, was viele einschlägig Beteiligte schon lange wussten und beobachtet haben: Lehramtsstudierende für die Sekundarstufe II haben im Vergleich zu Diplomstudierenden in nur geringem Umfang eine ‚belastbare, affektiv unterstützte Beziehung zur Mathematik'. Sie erleben, so die Studie, ihr Studium deutlich weniger als Chance für vielseitige Lernerfahrungen und empfinden den Studienaufbau und die Lehrenden als viel weniger hilfreich. Lehramtskandidaten fühlen sich vielfach als Studierende zweiter Klasse. Kurz: Im gymnasialen Lehramtsstudiengang für das Fach Mathematik mangelt es an sinn- und identitätsstiftenden Erfahrungen.

Diese Sinnkrise hat vor allem inhaltliche und methodische Ursachen: Durch den klassischen axiomatisch-deduktiven Aufbau der Fachveranstaltungen an der Universität wird den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System vermittelt. Die ursprünglichen Problemstellungen sowie die Prozesse der Begriffsbildung und der Theorieentwicklung in den jeweiligen Gebieten (einschließlich philosophischer Aspekte) spielen höchstens eine untergeordnete Rolle. Zudem wird unzureichend thematisiert, wie die Inhalte der Hochschulmathematik mit der später zu unterrichtenden Schulmathematik in Verbindung gebracht werden können. Bereits Anfang des 20. Jahrhunderts beklagte der für die gymnasiale Schulreform einflussreiche Mathematiker Felix Klein die Defizite der

Lehrerausbildung und beschrieb die inzwischen berühmte ‚doppelte Diskontinuität': *„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen.*" Der Befund ist unverändert aktuell. Erschwerend kommt hinzu: Die Methoden der Vermittlung an der Universität sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung, und die ‚Übungen' folgen in der Regel noch immer dem selben Instruktionsmuster, nicht selten sind sie reduziert auf ritualisiertes Vorrechnen von ‚perfekten' Musterlösungen.

Die so akzentuierte, traditionelle Fachausbildung ist eher produkt- und weniger prozessorientiert, und sie setzt eher auf die Instruktion durch die Lehrenden als auf die aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden.



Spannung und Verständnis durch philosophische und geschichtliche Einbettung. Hier: Es war die Idee von René Descartes geometrische Körper in ein dreidimensionales Koordinatensystem zu senken. Durch die drei Raumpunkte des ‚cartesianischen Koordinatensystems' wird der Körper eindeutig bestimm- und damit auch berechenbar. Der Beginn der Analytischen Geometrie.

Balance von Instruktion und Konstruktion

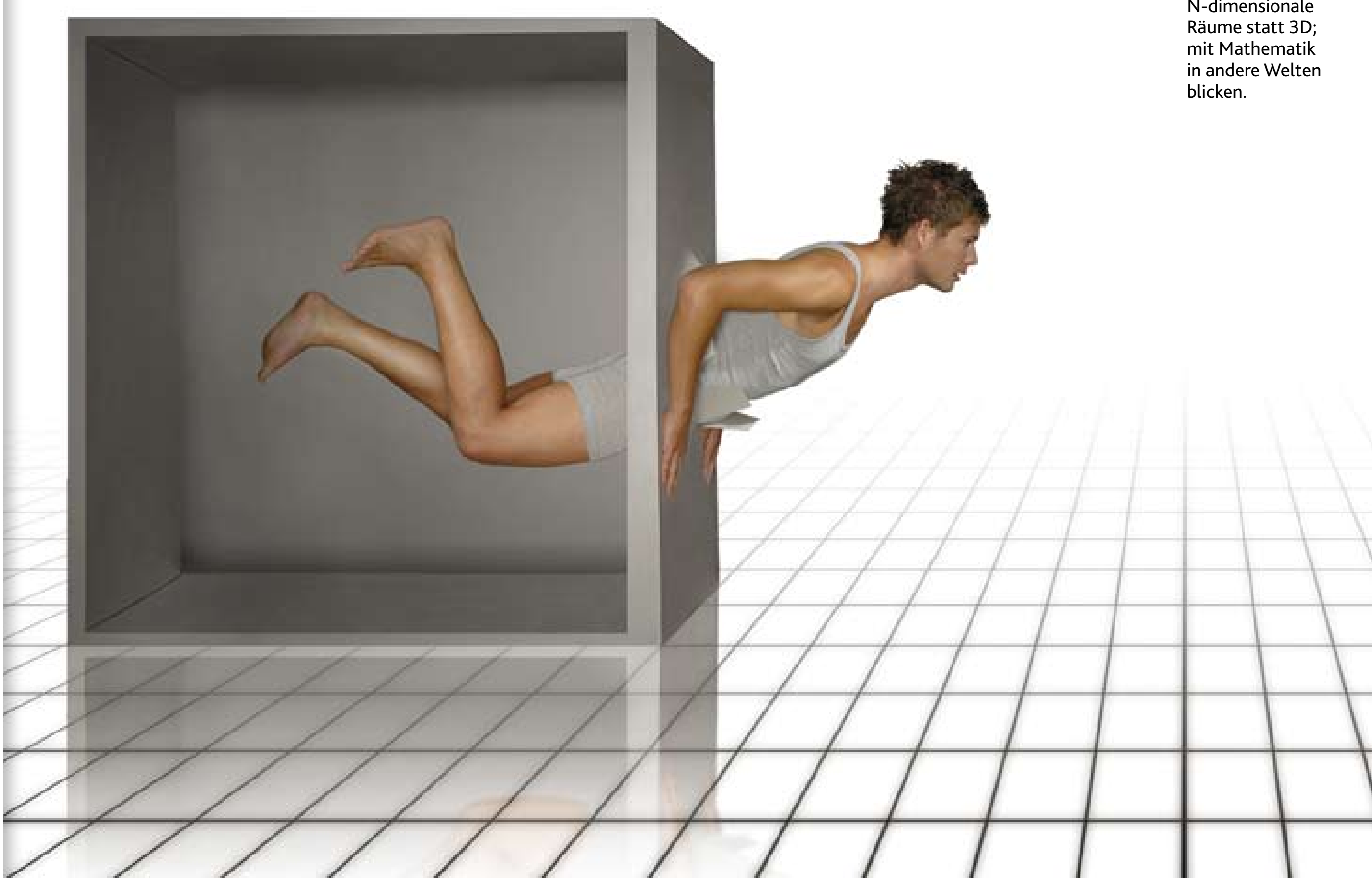
In der Balance von Produkt und Prozess sowie von Instruktion und Konstruktion liegt der Schlüssel für eine Verbesserung der fachbezogenen Lehrerausbildung. In einer neueren Denkschrift zur Lehrerbildung haben sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) und die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) gemeinschaftlich für Reformen der universitären Lehrerausbildung ausgesprochen. Der fachmathematische Teil der Ausbildung angehender Gymnasiallehrer hat hier eine Schlüsselrolle, weil man sich zunehmend bewusst wird, wie stark die eigenen Lernerfahrungen im Studium auch die Vorstellungen vom schulischen Mathematiklernen und -lehren prägen. Darüber hinaus wird seit langem beklagt, dass die ohnehin nicht gerade üppig verankerte fachdidaktische Ausbildungskomponente oft isoliert neben den fachwissenschaftlichen Anteilen steht. In

Sinn- und identitätsstiftende Angebote unterbreiten

der Denkschrift heißt es hierzu: *„Eine enge Verzahnung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung erscheint uns essenziell. Gegenwärtig ist der Abstand zwischen der konkreten fachinhaltlichen Ausbildung und der fachdidaktischen Umsetzung oft zu groß. Es sollte angestrebt werden, dass Fachwissenschaft und Fachdidaktik möglichst stark miteinander verzahnt werden und in Teilen sogar parallel laufen."*
Aktuell wird diese Einschätzung von der Lehrerstudie der OECD unterstützt: *„Das deutsche System der Lehrerbildung ist stark fachwissenschaftlich orientiert, und wenngleich es empfehlenswert und notwendig ist, dass Lehrkräfte über eine solide fachbezogene Wissensbasis verfügen, fehlt es doch häufig an einer Verbindung zum didaktischen Repertoire eines Lehrers."* Fazit: Die Defizite der gymnasialen Lehrerbildung im Fach Mathematik sind alt, gut beschrieben und unverändert aktuell.

Zielsetzung: Die von den einschlägigen Verbänden und der OECD angemahnte Verbindung zwischen fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildungskomponente setzt eine passende Sicht auf die Fachwissenschaft Mathematik voraus. So wie angehende Industriemathematiker oder Forschungsmathematiker spezifische Sichtweisen auf das Fach haben müssen und in ihrem Studium auch entwickeln, braucht der angehende Gymnasiallehrer diese Möglichkeit ebenso. Nur dann kann er eine positiv besetzte Haltung gegenüber seinem Fach gewinnen, und diese ist entscheidend für seinen beruflichen Erfolg als Fachlehrer. Ziel ist es, dem berechtigten Anspruch von Lehramtsstudierenden nach fachbezogener Professionalität Rechnung zu tragen und die Verbindung zwischen Fach- und Berufsfeldbezug deutlicher werden zu lassen. Dies hat inhaltliche und methodische Konsequenzen: Für die Entstehung eines gültigen, prozessorientierten Bildes von Mathematik sollen historisch-genetische und philosophische Sichtweisen durchgängig einbezogen werden. Darüber hinaus kommt es darauf an, einer elementarmathematisch orientierten ‚Schulmathematik vom höheren Standpunkt' entsprechendes Gewicht zu geben und zugleich die fachdidaktische Ausbildungskomponente früh zu integrieren. Methodisch gilt es, zu einer Balance zwischen Instruktion (durch die Lehrenden) und aktiver Konstruktion des Wissens (durch die Lernenden) zu kommen sowie heuristischen Aktivitäten genügend Raum zu geben. Insgesamt geht es um einen Paradigmenwechsel im Umgang mit der Mathematik: Nicht nur die fertige Disziplin Mathematik, sondern gleichgewichtig die Beziehung Mensch-Mathematik soll im Mittelpunkt des Interesses stehen.

Umsetzung: Realisiert wurde diese programmatische Idee als Tandemprojekt der Universitäten Gießen



Faszination Hyper-Space: N-dimensionale Räume statt 3D; mit Mathematik in andere Welten blicken.

(verantwortlich: Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher) und Siegen (Prof. Dr. Rainer Danckwerts zusammen mit Prof. Dr. Wolfgang Hein bzw. Prof. Dr. Gregor Nickel) und der Deutschen Telekom Stiftung. Die klassischen Anfängerveranstaltungen eines Mathematikstudiums für das gymnasiale Lehramt sind ‚Analysis' und ‚Lineare Algebra'. Gießen nahm sich die Neuorientierung der Linearen Algebra vor und Siegen die Analysis. Die Reformbemühungen konzentrierten sich auf das erste Studienjahr. Das Programm wurde im zweiten Projektjahr mit der neuen Anfängerpopulation wiederholt und jeweils semesterbegleitend evaluiert (Laufzeit des Projekts: 2005 – 2007). Hier soll vom Siegener Teilprojekt berichtet werden.

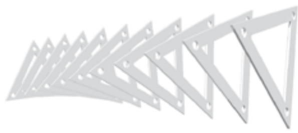
Den eigenen Vorstellungen Raum geben

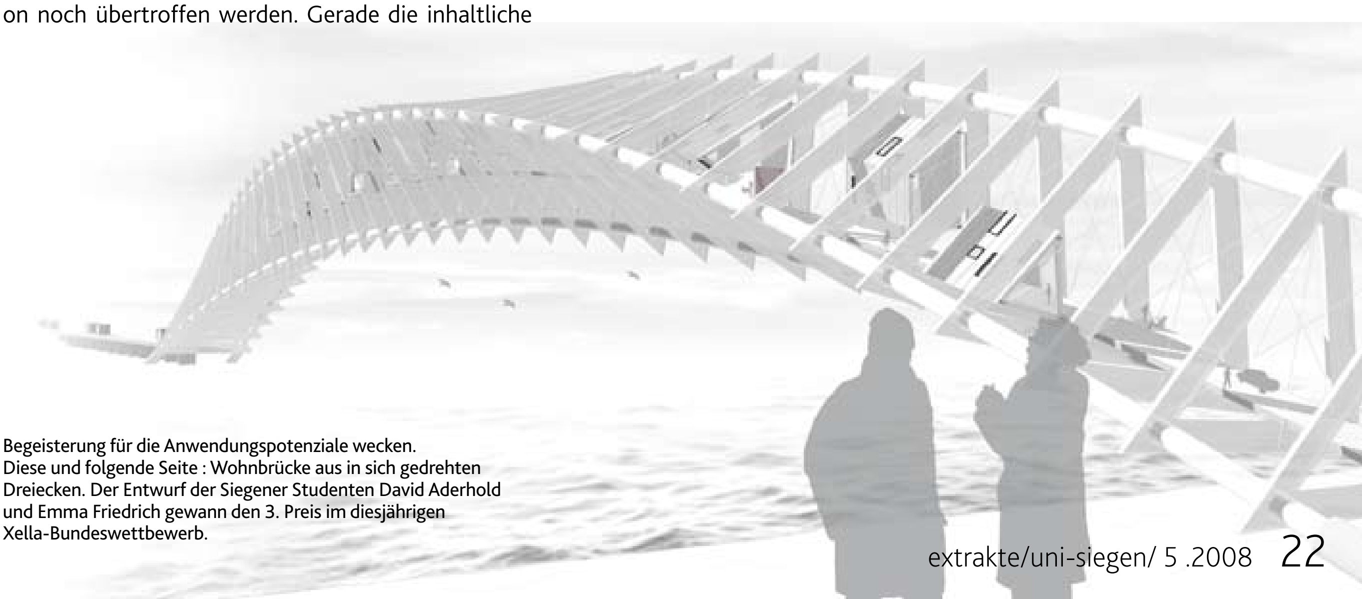
Ein neues Element im ersten Semester war die Auseinandersetzung mit der ‚Schulanalysis vom höheren Standpunkt'. Hier ging es um eine Standpunktverlagerung: weg von der vertrauten Beherrschung analytischer Rechenverfahren in der Schule hin zu einem verstehens- und vorstellungsorientierten Umgang mit elementarer Analysis. In enger Abstimmung damit wurde die klassische Analysis I so entfaltet, dass die ideengeschichtliche und philosophische Sicht der Analysis durchgängig integriert war. Das zweite Semester beinhaltete neben der genauso strukturierten Analysis II eine fachlich akzentuierte Erstbegegnung mit einer Didaktik der Analysis, die seminaristisch angelegt war. In dieser fachdidaktischen Veranstaltung wurden die Erfahrungen aus dem ersten Semester zur Schulanalysis vom höheren Standpunkt systematisch aufgenommen. Die Übungsgruppen neuer Art hatten jeweils eine eigenständige und für das Gelingen des Projekts zentrale Funktion: In ihnen fand die freie sowie die gelenkte Erkundung passender inhaltlicher Angebote und heuristisches Denken und Arbeiten statt, unter der Anleitung und Begleitung geeignet vorbereiteter studentischer und wissenschaftlicher Hilfskräfte. Erst durch diese Gelenkstelle zwischen bündelnder Vorlesung und individueller Arbeit waren die Ziele des Projekts erreichbar.

Ergebnisse: Die Erfolge, die das Projekt bereits im ersten Jahr hatte, konnten im zweiten Jahr bestätigt bzw. durch kleine Veränderungen in der Organisation noch übertroffen werden. Gerade die inhaltliche Komponente hat sich für die Studierenden als wesentlicher Kristallisationspunkt der Identitätsstiftung erwiesen. Die anspruchsvolle Thematisierung schulanalytischer Inhalte in der ‚Schulanalysis vom höheren Standpunkt' und das Spannungsfeld von Schulanalysis und Didaktik der Analysis wurden hinsichtlich der Verbindung von Fach- und Berufsfeldbezug als zentrale Elemente der Sinnstiftung empfunden und den dort verhandelten Inhalten wurde ein großes Maß an Relevanz für den späteren Beruf zugeschrieben. Die hohe Akzeptanz der Analysis I/II-Veranstaltung beruhte zum einen darauf, dass es gelungen ist, die historisch-genetische und philosophische Sicht auf die Wissenschaft explizit zu integrieren und damit zu einem prozessorientierten Bild von Mathematik beizutragen (‚Analysis als Kulturleistung'). Zum anderen war der neu strukturierte Übungsbetrieb konsequent darauf angelegt, die eigenaktive und kooperative Auseinandersetzung der Studierenden mit dem Gegenstand zu stärken. Die intendierte Balance von Instruktion und Konstruktion wurde damit umfassend realisiert: In der ‚Analysis I/II' vor allem über das Zusammenspiel von Vorlesung und Übungen, in der ‚Schulanalysis vom höheren Standpunkt'/ ‚Didaktik der Analysis' in den Veranstaltungen selbst. Hervorzuheben ist die soziale Dimension des Projekts. Wie sämtliche Erhebungen und Befragungen ergaben und wie auch spontanen Äußerungen einzelner Projektteilnehmer zu entnehmen war, fühlten sich die Studierenden

Mathematik neu denken

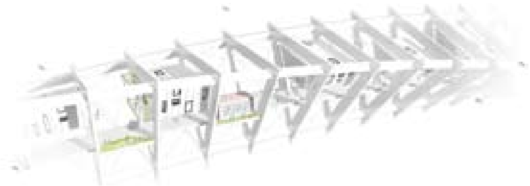
Mit ‚Mathematik Neu Denken' fördert die Deutsche Telekom Stiftung, die Universität Siegen und die Universität Gießen ein Forschungs- und Entwicklungsvorhaben zur Neuorientierung der universitären Gymnasiallehrer-Ausbildung im Fach Mathematik. Ziel ist es, die Qualifikation der angehenden Pädagogen und damit langfristig auch die Qualität des Mathematikunterrichts zu verbessern. Die wissenschaftliche Leitung des Pilotprojekts liegt bei Prof. Albrecht Beutelspacher (Gießen) und Prof. Rainer Danckwerts zusammen mit Prof. Gregor Nickel (Siegen). Alle drei engagieren sich seit langem für einen Paradigmenwechsel im Umgang mit der Mathematik. Nach ihrer Auffassung werden die Studierenden traditionell so mit der Mathematik konfrontiert, dass für viele der Zusammenhang mit dem Berufsziel Lehrer nicht sichtbar ist. Um dieses Defizit zu beseitigen, befürworten sie eine grundsätzlich neue Vorbereitung künftiger Lehrerinnen und Lehrer, die sie mit dem Stiftungsprojekt umsetzen.





Begeisterung für die Anwendungspotenziale wecken.
Diese und folgende Seite : Wohnbrücke aus in sich gedrehten Dreiecken. Der Entwurf der Siegener Studenten David Aderhold und Emma Friedrich gewann den 3. Preis im diesjährigen Xella-Bundeswettbewerb.

gut aufgehoben und waren von der angenehmen Atmosphäre, dem ihnen entgegengebrachten Vertrauen und der Aufmerksamkeit sehr angetan – oft sogar überrascht. Sie spürten, dass sie als Lehramtsstudierende mit eigenen Bedürfnissen und eigenen Anforderungen an das Studium ernst genommen wurden. Auch der soziale Zusammenhalt der Projektgruppen entwickelte sich positiv, wozu u.a. die Wochenendseminare (zusammen mit den Gießener Studierenden) beigetragen haben. Einen wesentlichen Beitrag zu diesem Erfolg leistete die in Umfragen immer wieder hervorgehobene exzellente Betreuung durch die Dozenten, Mitarbeiter und Tutoren. Das Ergebnis in Zahlen: Am Ende des ersten Semesters haben 80 %

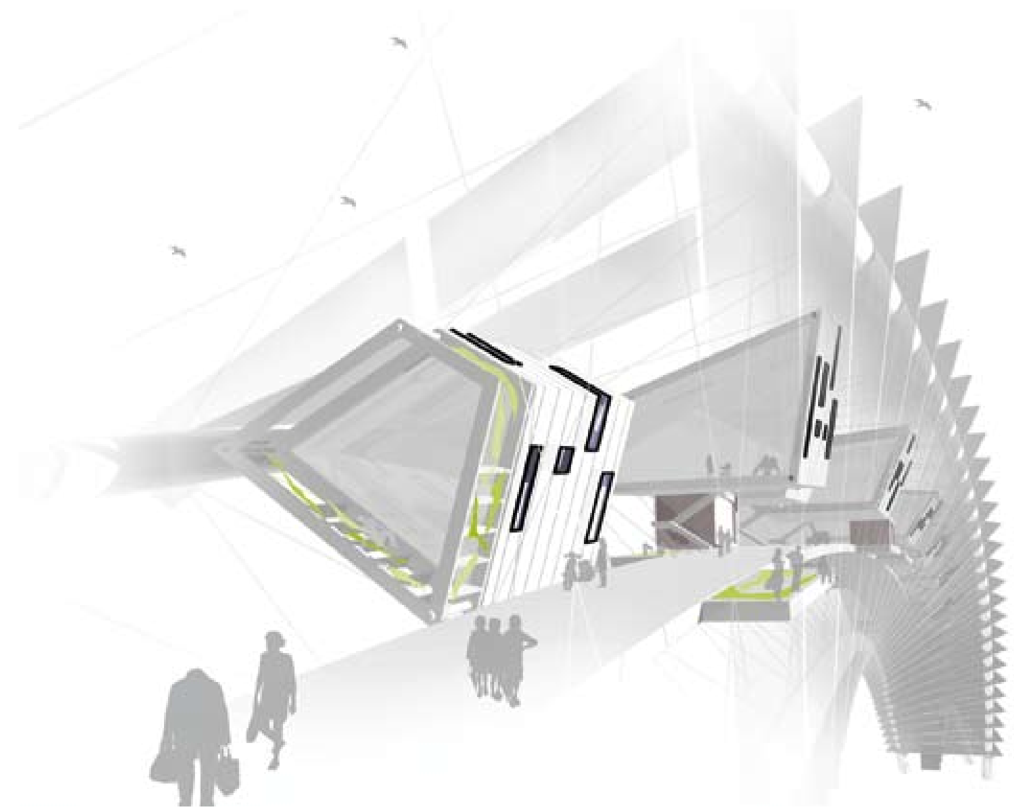


beide Klausuren bestanden, die Abbrecherquote war mit ca. 20 % deutlich niedriger als üblich, und 80 % der Teilnehmer erwarteten, dass sie durch dieses Studium gut auf den Beruf des Mathematiklehrers vorbereitet werden.

Perspektiven: Ein besonderes Kennzeichen der zweijährigen Projektarbeit war, dass alle Veranstaltungen exklusiv für Studierende des gymnasialen Lehramtes zugänglich waren. Dabei konnte unter ‚Laborbedingungen' auf die Zielgruppe des Projekts eingegangen werden. Im dritten Projektjahr (2007/2008) ist nun das Experiment unternommen worden, die ‚Analysis I' wie üblich für alle Studierenden zu öffnen. Dabei sollte sich zeigen, ob die positiven Ergebnisse bei der Identifikation der Lehramtsstudierenden mit ihrem Studium der exklusiven Bedingungen bedürfen oder auch in einem integrativen Modell erreicht werden können. Erste Ergebnisse stimmen optimistisch. Als entscheidend scheint sich zu erweisen, dass die parallele ‚Schulanalysis vom höheren Standpunkt' sowie der neuorientierte Übungsbetrieb beibehalten wurden.

Programmarbeit: Bisher wurde die Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik (gymnasiales Lehramt) für das erste Studienjahr konzipiert und als Pilotprojekt realisiert. Nach dem Erfolg des Projekts ist – auch über die beiden Projektstandorte hinaus – zunehmend die Frage drängender geworden, wie die konsequente Ausdehnung der Projektidee auf ein volles Mathematikstudium für das gymnasiale Lehramt aussehen kann.
Dies ist eine herausfordernde Entwicklungsaufgabe, bei der die traditionell gelehrte Hochschulmathematik unter dem Aspekt der Professionalisierung auf die Zielgruppe hin tatsächlich ‚neu gedacht' werden muss. Zentrale Punkte sind der fachmathematische Kanon, die Stellung der Didaktik der Mathematik sowie die Lehr- und Lernformen. Hierzu müssen konkrete Empfehlungen erarbeitet und konzeptionell begründet werden. Geplant ist, um der Arbeit die nötige bundesweite Akzeptanz zu sichern, eine überregionale Expertengruppe zu berufen, die neben den bisher an

Projektbuch
Zu dem erklärten Ziel, die Projektidee breit zu kommunizieren und die ermutigenden Erfahrungen bundesweit zugänglich zu machen, soll ein Projektbuch beitragen. Es wird neben einem programmatischen Teil einen Erfahrungsbericht aus der dreijährigen Projektarbeit in Gießen und Siegen sowie ausgewählte kommentierte Materialien enthalten. Ein weiteres Element sind – mit Bezug auf die vorangegangene Programmarbeit – die Perspektiven der Weiterentwicklung der Projektidee.



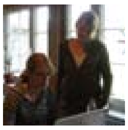
beiden Standorten verantwortlichen Hochschullehrern weitere einschlägig ausgewiesene Fachmathematiker und Mathematikdidaktiker umfassen wird. Zunehmend wird verstanden, dass für die Überwindung der Akzeptanzprobleme der Mathematik in der Gesellschaft den Mathematiklehrerinnen und -lehrern eine Schlüsselrolle zukommt. Ihre fachbezogene Sozialisation an der Universität beeinflusst entscheidend ihr Bild von der Mathematik und vom Mathematikunterricht. Hier liegt ein großes Potenzial für fruchtbare Entwicklungen.

Verfasser: Rainer Danckwerts

Text und Bilder sind frei zum Wiederabdruck

Auswahl zusätzlich verfügbarer Bilder





Texte, Bilder und Zusatzmaterial

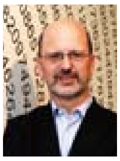
www.extrakte.uni-siegen.de

Video

Dr. Albrecht Beutelspacher: Mathematische Experimente

Kontakt:

Prof. Dr. Rainer Danckwerts
Universität Siegen
Telefon: XX49 (0)271 740 3579
Telefax: XX49 (0)271 740 3583
danckwerts@mathematik.uni-siegen.de
Didaktik der Mathematik
www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/tkprojekt



Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
Universität Gießen
Telefon: XX49 (0)641 99 32080
Telefax: XX49 (0)641 99 32029
albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de
Diskrete Mathematik und Geometrie
http://www.beutelspacher.info

Literaturtipps:

Beutelspacher, A./ Danckwerts, R. (2008):
Mathematik Neu Denken. Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Abschlussbericht 2005-2007. Gießen / Siegen.

Beutelspacher, A./ Danckwerts, R. (2005):
Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Programmatische Vorstudie für die Deutsche Telekom Stiftung. Gießen / Siegen.

Hefendehl-Hebeker,L. / Schuster, A. (2006):
Probleme und Perspektiven der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. Deutsche Telekom Stiftung Bonn

Vorstellungen bilden

Auch im Mathematikunterricht?!

„Eine Strecke zwischen zwei Punkten A und B ist endlich lang. Wie kann sie dann unendlich viele Punkte haben?" Alltagsverständnis und mathematische Theorie klaffen an vielen Stellen auseinander. Lernende stellt dieses Missverhältnis vor Herausforderungen, auf die im Schulunterricht bislang nur wenig eingegangen wird. Was Schüler mit ihrem geistigen Auge sehen, wenn sie sich mit Mathematik auseinandersetzen und warum angehende Lehrer sich ihre eigenen Verständnisschwierigkeiten bewußt machen sollten.

„Warum muss ich Mathematik lernen?" lautet eine gängige Frage, die Eltern von ihren Kindern zu hören bekommen. Zwischen den Zeilen lässt sich daraus unterschiedliches lesen. Entweder: Es ist mühsam, Mathematik zu lernen, warum muss ich das also tun? Es kann aber auch bedeuten: Mathematik ist mir fremd, sie hat nichts mit mir und meinem Leben zu tun.
Das Pensum sei zu hoch, und das Interesse der Schüler zu gering, klagen auch die Lehrer. In den Schulen macht sich angesichts der Stofffülle und der häufig konstatierten Bedeutungslosigkeit der Einzelinhalte eine gewisse Mutlosigkeit breit.

Dabei ist Mathematik doch so wichtig!?

Niemand würde behaupten, dass Mathematik wert- und nutzlos ist. Im Gegenteil, jeder weiß, dass viele Errungenschaften der modernen Welt ohne Mathematik nicht Wirklichkeit geworden wären. Sie ist ein wichtiges Instrument, mit dem sich der Mensch in Vergangenheit und Gegenwart mit den – auch wenn der Begriff das Gegenteil postuliert – ‚Unberechenbarkeiten' der Natur auseinander setzt und seine eigene Umwelt mitgestaltet. Dennoch klafft zwischen dieser objektiven Bedeutung von Mathematik und ihrer subjektiven Bedeutungslosigkeit für die je einzelne Person eine riesige Lücke, wie bereits Hans Werner Heymann, Professor für Erziehungswissenschaft an der Universität Siegen, betont hat. Vielleicht liegt diese spürbare Differenz gerade darin begründet, dass Mathematik funktioniert, auch ohne dass man sie versteht – ein Gedanke, den Roland Fischer vom Institut für Interdisziplinäre Forschung und Fortbildung der Universitäten Klagenfurt/Graz/Wien, weiter ausformuliert hat. Oder wissen Sie, was die Mathematik im Handy, im Computer und beim Auto alles ermöglicht?

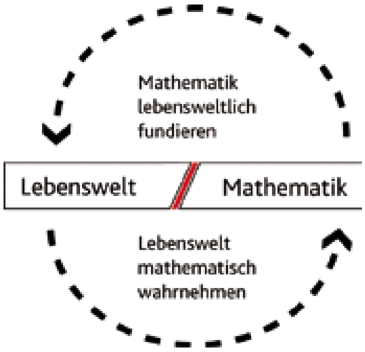
Mathematik – ein Fenster zur Welt

Wenn das alles wäre, dann könnte man die Angelegenheit doch eigentlich den Experten überlassen. Dann würde es doch reichen, wenn eine wohl ausgebildete Gruppe von Fachleuten es sich zur Aufgabe macht, dass die Entwicklung anwendungsorientierter Mathematik nicht ins Stocken gerät. Worin also besteht – jenseits des technisch-ökonomischen Nutzens – der Mehrwert mathematischer Bildung? Was macht sie aus, und wie müsste sie gestaltet sein, damit sie nicht subjektiv bedeutungslos bleibt?

Gegensatz von objektivem Nutzen und subjektiver Bedeutungslosigkeit

Mathematik ist eine Sicht auf die Welt, eine Möglichkeit reale Begebenheiten zu beschreiben und damit für viele transparenter zu machen. Sie abstrahiert von der Mannigfaltigkeit der Erscheinungen dieser Welt, um dadurch einen Blick auf die zugrunde liegenden

Strukturen zu erheischen. Allerdings steckt in dieser Beschreibung, wie in jeder anderen auch, immer eine Beschränkung, ein Fokus bzw. eine Perspektive. Mathematik als Weltsicht hilft der je einzelnen Person, sich selbst Phänomene der realen Welt auf eine spezifische Weise zugänglich zu machen. Sie liefert Beschreibungsmittel, um komplexe Zusammenhänge fasslich und dadurch gegenüber anderen kommunizierbar zu machen.



Dieses Erlebnis von ‚Mathematik als einem Fenster zur Welt' sollte bereits in der Schule ermöglicht werden. Dafür müssen Kinder die Gelegenheit haben, in sinnstiftenden Kontexten zu lernen; es geht darum Lücken zu schließen und Brücken zu bauen zwischen der persönlichen Erfahrungswelt der Lernenden und der Mathematik. Allerdings geht das nicht ohne Verwerfungen. Die Beziehung von Lebenswelt und Mathematik ist nicht ungetrübt, das ‚Fenster Mathematik' eröffnet nur einen eingeschränkten Blick; u.U. werden auch bestimmte Zusammenhänge in ihren Bedeutungen verändert. All dies wahrzunehmen und bewusst zu machen, ist Gegenstand mathematischer Bildung, die das Subjekt mit seinen je spezifischen Erfahrungen und Vorstellungen ernst nimmt.

Mathematische Mündigkeit zielt demnach u.a. darauf, einerseits für die Grenzen und perspektivischen Verschiebungen zu sensibilisieren, die darin liegen Mathematik als Weltzugang zu nutzen, andererseits aber auch die Chancen bewusst zu machen, die sich durch ihren instrumentellen Gebrauch sowohl für die Erkenntnis als auch für das gestaltende Eingreifen eröffnen.

Spannungsfeld von Lebenswelt und Mathematik

Zur Verdeutlichung des Reflektierens im Spannungsfeld von Lebenswelt und Mathematik mag ein kleines Beispiel dienen: Eine Frau ist sehr tierlieb und setzt sich stark für die Umwelt ein. Was ist wahrscheinlicher? A) Sie hat einen Hund, arbeitet in einem Umweltbüro. B) Sie arbeitet in einem Büro.

Viele Kinder und auch Erwachsene würden Antwort A wählen. Aus mathematischer Sicht der Wahrscheinlichkeit ist jedoch Variante B richtig. Warum? Wahrscheinlicher ist, was eine größere Anzahl an ‚günstigen' Fällen zulässt. Die Aussage ‚die Frau arbeitet in einem Büro' ist weniger spezifisch als die Aussage ‚sie arbeitet in einem Umweltbüro und hat einen Hund'. Damit gibt es mehr ‚günstige' Fälle für Aussage B, also ist B wahrscheinlicher. Nun mögen Sie einwenden, dass für Sie die Tierliebe der Frau auf das Halten eines Hundes hindeutet und der Einsatz für die Umwelt eine Arbeit im Umweltbüro wahrscheinlich macht. Subjektive Plausibilität spielt jedoch beim mathematischen Begriff der Wahrscheinlichkeit keine Rolle. Es werden hier nur die Fälle gezählt.

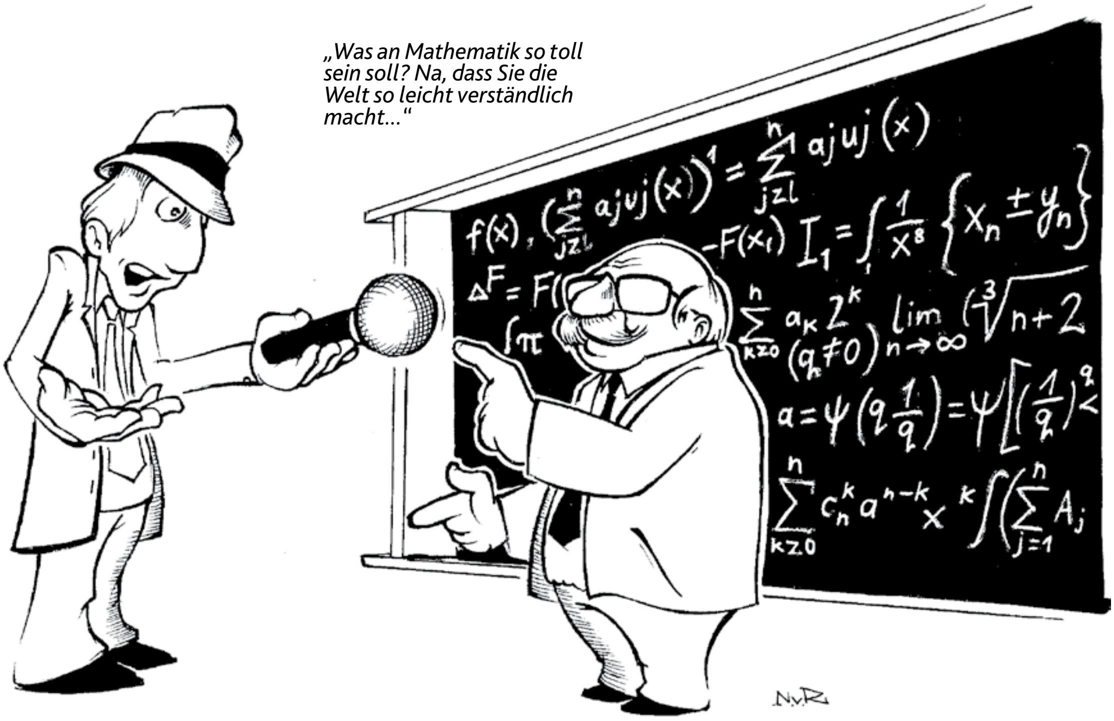
Kenntnisse über die Differenzen von subjektiv empfundener Wahrscheinlichkeit und mathematischem Wahrscheinlichkeitsbegriff sind wesentlich, um sich gegenüber der Wahrscheinlichkeitsrechnung mündig verhalten zu können. Dies ist an der folgenden Beispielaufgabe aus dem Mathematikunterricht zu sehen:

Lücken schließen und Brücken bauen zwischen der persönlichen Erfahrungswelt der Lernenden und der Mathematik

Lisa hat von einem Flugzeugunglück gehört. Nun möchte sie nicht mehr mit ihren Eltern mit dem Flugzeug in den Urlaub fliegen. Ihre Mutter sagt: „Sei nicht albern; dass gleich wieder eine Maschine abstürzt ist völlig unwahrscheinlich." Nimm aus Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung Stellung zu Lisas Sorge und zu dem Argument der Mutter.

Sicher hat Lisas Mutter aus Alltagssicht Recht. Es stürzen nicht jeden Tag Flugzeuge ab und daher wäre es schon extremes Pech, wenn ein solches Unglück sich sofort wieder ereignen würde. Allerdings, so mag Lisa einwenden, sind Sicherheitsmängel bei dieser Fluggesellschaft nicht ausgeschlossen. Vielleicht wa-

Schwer vorstellbar: Die Unendlichkeit zwischen zwei Punkten



ren sie der Grund für das Flugzeugunglück – was auf weitere Probleme schließen lassen könnte. Ihre Sorge lässt sich also nicht so leicht zerstreuen.
Aus mathematischer Sicht auf die Wahrscheinlichkeit spielt das kürzlich vorgekommene Flugzeugunglück keine Rolle (außer man bezieht die Wahrscheinlichkeit des Unglücks auf eine Gesellschaft und deren mögliche Sicherheitsmängel). Vielmehr sind solche Ereignisse voneinander unabhängig. Der Zufall merkt sich nicht, dass da gerade ein Unglück war. Die Wahrscheinlichkeit für ein Unglück bleibt somit gleich, egal ob sich am Tag zuvor bereits ein solches ereignet hat.Dennoch spielt und das ist aus Sicht der Mündigkeit wichtig, Mathematik hier in ihrer schlichten Form eine untergeordnete Rolle. Es geht um eine Entscheidung die andere Faktoren – etwa die Vertrauenswürdigkeit einer Fluggesellschaft mit einbezieht.

Forschungsfragen

In den letzen Jahren hat sich die mathematikdidaktische Forschung zunehmend um die Frage bemüht, welche Bilder und Anschauungen bei den Lernenden im Unterricht aktiviert werden. Im Rahmen dieser Perspektive blieben aber bis dato noch vielfältige Aspekte unterbeleuchtet, von denen aktuell einige wichtige in der Siegener Mathematikdidaktik untersucht werden. Mit Blick auf die Curriculumsentwicklung ist etwa die Frage nach denjenigen Handlungsfeldern relevant, in denen sich Schülern Mathematik in ihrem Wert erschließt. Welche Vorstellungen generieren sie in diesen Handlungsfeldern und inwiefern passen sie mit der Mathematik zusammen? In mehreren Staatsarbeiten setzen Siegener Studenten sich mit diesem Thema auseinander. Sie entwerfen Aufgabenkomplexe, die einerseits einen Bezug zu lebens- und gesellschaftsbedeutsamen Handlungssituationen und andererseits zu zentralen Themen der Grundschule aufweisen und erproben diese im Anschluss daran auch im Unterricht. Dabei werden die Vorstellungen der Lernenden konsequent erhoben und ausgewertet. Die Ergebnisse dieser Arbeiten sollen zum Aufbau eines Konzeptes für ein projektorientiertes Curriculum beitragen, das eine vorstellungsorientierte Alternative zum derzeit üblichen Schulbuchaufbau bietet.
Gerade für die Grundschule kommt dabei ein weiteres Themenfeld als zentraler Untersuchungsgegenstand hinzu. Denn, geht es darum, Informationen über die Vorstellungen zum mathematischen Denken und Handeln der Lernenden zu gewinnen, setzt dies ja nicht nur voraus, dass die Befragten sich ihrer eigenen Vorstellungen bewusst sind, sondern auch, dass ihnen

geeignete Ausdrucksmittel zur Veräußerung ihrer Gedanken zur Verfügung stehen. Die Reflexion des eigenen Denkens basiert aber auf Ausdrucksformen, die man erst im Laufe seines Lebens entwickelt. Im Rahmen eines Dissertationsprojekts wird derzeitig der Frage nachgegangen, wie geeignete Ausdrucksformen für die Gedanken und Vorstellungen der jüngeren

Fortsetzung auf S. 28 –>

Mathematische Anschauung von Kindern zwischen Diskret und Kontinuierlich

Wie stellen sich Kinder Zahlen vor? Bei der Entwicklung von Zählkompetenzen verwenden Kleinkinder die Zahlwortreihe wie einen Reim, wie ein Gedicht, das sie aufsagen. Eins, zwei, drei, vier, … Vielleicht mehr als 100 Mal hat ein Kleinkind Zahlen so aufgesagt, bevor sich das erste Zählen als Ermitteln einer Anzahl von Objekten einstellt. Nun werden konkreten Objekten die Zahlen im Reim zugeordnet. Es gibt einige Kinder, die hier bereits Schwierigkeiten mit der Vorstellung bekommen, da sie diese Zuordnung mit der Anzahl der Elemente nicht zusammenbringen. Hier scheint schon ein Problem auf der Vorstellungsseite zu liegen. Was ist eigentlich zählen, um was geht es dabei? Welche Grundidee steht dahinter und warum ist man an der Anzahl von Elementen überhaupt interessiert?

Springen wir zum Ende der Grundschulzeit und setzen voraus, dass die mathematische Bildung bis dorthin auf fruchtbaren Boden fiel. Welche Vorstellungen von Zahlen haben Kinder dann? Häufig werden Zahlen als eine Art Perlenkette gesehen. Diese hat einen Anfang aber kein Ende. Jede Perle hat zwei direkte Nachbarn, außer der Null, die hat nur die Eins als Nachbarn. Mit den Zahlen kann man rechnen. Wenn man Multipliziert wird das Ergebnis in der Regel größer, wenn man teilt, wird das Ergebnis kleiner.

Nun kommen diese Kinder mit ihren Vorstellungen in die Mittelstufe und sollen mit Brüchen rechnen. Das

Wahrscheinlichkeit

ursprüngliche Bild kommt ins Wanken. Die Brüche erfüllen die oben genannte Vorstellung von Zahlen zu weiten Teilen nicht mehr. Sie lassen sich nicht wie eine Perlenkette anordnen; zwischen je zwei Brüchen liegt noch ein dritter, also gibt es keine direkten Nachbarn. Man sagt auch, dass die Brüche ‚dicht' liegen. Zu großen Verwirrungen führt, dass beim Malnehmen von Brüchen das Ergebnis nicht immer größer und beim Teilen nicht immer kleiner wird: „2 durch ¼ = 8. Das kann doch nicht sein, ich habe doch geteilt."

Hier ist ein Aushandlungsprozess über die Vorstellungen der Kinder essentiell, will man nicht eine Bildungschance leichtfertig vergeben. Allzu häufig wird jedoch aus Gründen der Effektivität darauf verzichtet. Ein Einschleifen

Verständnis für irrationale Zahlen?!

von Routinen ist die Folge, mit dem Effekt, dass das was unverstanden ist, schnell wieder vergessen wird.

Haben die Lernenden diese ‚Durststrecke' überwunden und sich an die etwas merkwürdigen Bruchzahlen gewöhnt (der Taschenrechner kann im Ernstfall damit umgehen), so kommt zum Ende der Sekundarstufe I die nächste Hürde. Die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat ist zu bestimmen. Wir suchen eine Zahl, die mit sich selbst Mal genommen zwei ergibt. Wurzel aus zwei wird als Lösung akzeptiert, doch was ist das? Tippen wir es in den Taschenrechner, dann ergibt sich ein solches Bild: $\sqrt{2} = 1{,}414213562$

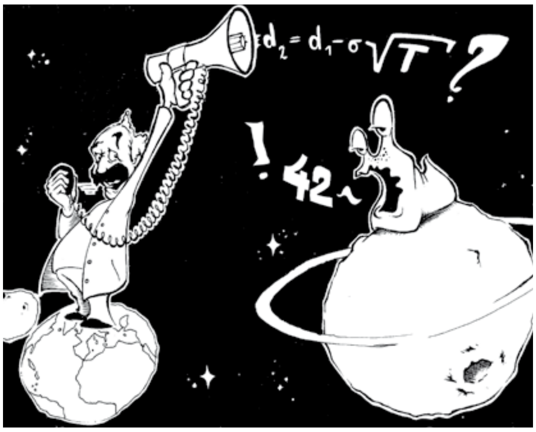
Die schnelle Analyse für pfiffige Denker zeigt: Das kann nicht sein, denn $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ war ja vorausgesetzt. Die Ziffer an der letzten Stelle der Dezimalzahl $\sqrt{2}$ mal sich selbst genommen, muss also Null ergeben. Eine solche Ziffer gibt es aber nicht. Der Schluss, dass es damit keine letzte Stelle der Dezimalzahl $\sqrt{2}$ geben kann, ist schwer verdaulich und aufregend zugleich. Hier kann an der potentiellen Realität der Mathematik geschnuppert werden, gibt es doch solche unendlich feinen Zahlen als Maßzahlen nicht.

Auch für Lehramtsstudierende ist es nicht leicht, sich den oben angedeuteten Spannungsfeldern zu stellen, fallen hier doch Alltagsverständnisse und mathematische Theorie wesentlich auseinander. Es hilft, Studierende Geschichten schreiben zu lassen, in denen sie etwa einem Sechstklässler die Dichtheit der Bruchzahlen erklären sollen. Damit setzten sie sich auch mit ihren eigenen Vorstellungen zu dem Thema intensiv auseinander. Einige gelungene Geschichten bemühen Analogien. Die Kinder sollen sich auf einen Zollstock setzten und sich immer weiter in die Maßeinteilung des Zollstocks hineinzoomen. So sehen sie, dass es potentiell unendlich feine Maßeinteilungen gibt, auch wenn sie in der realen Welt keine Bedeutung mehr tragen. So genau kann niemand messen, noch nicht einmal der Nanotechniker oder der Femtochemiker.

Kinder aussehen könnten. Bestehende Vorstellungen zu erheben und gezielt zu verändern erfordert eine gute Kenntnis der psychologischen und pädagogischen Hintergrundtheorien und Methoden. Hier profitiert die Siegener Mathematikdidaktik von der engen Verzahnung mit der Arbeitsgruppe Lehr-Lern-Forschung, in der Wissenschaftler aller Didaktiken und der Erziehungswissenschaften zusammenarbeiten (siehe hierzu auch Extrakte Nr.4).

Universitäre Lehrerbildung

Ein solches Bild von Mathematiklernen, das die Lernenden mit ihren Vorstellungen und Erfahrungen ernst nimmt und Mathematik als ein Fenster zur Welt versteht, erfordert auch andere Perspektiven auf die Lehrerbildung (Zur Lehrerbildung im Sekundarstufenbereich wurde dies von Rainer Danckwerts in diesem



Universelle Sprache der Natur

Heft ausgeführt. S.18ff). Lehrkräfte sollen nicht nur die Mathematik hervorragend kennen und verstehen, sondern sie müssen eben auch die Erfahrungen und Vorstellungen der Lernenden, sofern dies an der Universität schon möglich ist, sensibel wahrnehmen lernen. Dafür werden sie frühzeitig mit dem Konzept des Reflektierens im Spannungsfeld von Mathematik und Lebenswelt konfrontiert und können bereits in ihrem eigenen Lernprozess ihre lebensweltlichen Erfahrungen mit der Mathematik abgleichen. Solche Reflexionsprozesse selbst zu erleben, hilft den zukünftigen Lehrkräften dabei, den Lernenden später auch ernsthaft und wertschätzend gegenüber zu treten.

Interessant sind dabei Dokumente, die die Lehramtsstudierenden im Rahmen einer schriftlichen Arbeit verfasst haben. Die Aufforderung war, in einem Brief zu beschreiben, welche Stellen der Mathematik sie als unlogisch empfinden. Die Vielfalt der Antworten ist erstaunlich. Da sind zum Beispiel auf einer etwas anderen Ebene die Probleme, die auch die Kinder mit der ‚hypothetischen Realität' der Mathematik haben.

- „Was bedeutet 1 durch 0? Warum geht das nicht? Ich habe doch eine Torte auf Null Personen also keinen verteilt. Dann ist die Torte ja noch da."

- „Wie können die natürlichen Zahlen (0, 1, 2, ...) und die ganzen Zahlen (... -2, -1, 0, 1, 2, ...) gleich viele sein? Es sind doch doppelt so viele ganze Zahlen wie natürliche!"

- „Eine Strecke zwischen zwei Punkten A und B ist endlich lang. Wie kann sie dann unendlich viele Punkte haben?"

- „Gibt es eine Zahl, die eins größer ist als unendlich? Wenn es sie gäbe, wäre dann ‚unendlich' überhaupt ‚unendlich'?"

- „Warum ist 0,999... = 1? Es fehlt doch noch ein unendlich kleines Bisschen bis zur Eins, oder ist das so wenig, dass man es vernachlässigen kann?"

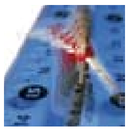
- „Warum ist Minus mal Minus Plus? Mir fällt kein anschauliches Beispiel aus dem Alltag ein!"

Aber Sensibilität alleine reicht nicht aus. Es muss auch am Inhalt und an den Vorstellungen der Studierenden gearbeitet werden. So zeigt sich eben, dass die Studierenden auch eine Vielzahl von Vorstellungen kennen müssen, die Kinder zu bestimmten mathematischen Gegenständen potentiell haben können. Auf diese Weise werden die angehenden Lehrer in die Lage versetzt zu beobachten und zu beschreiben, wo die Schülerinnen und Schüler stehen, um sie dann gezielt fördern zu können.
Fazit: Der Titel des Beitrages ist in zweifacher Hinsicht gemeint. Zum einen als Aufforderung Vorstellungen im Lernprozess zu bilden, zum anderen als Bildungsinhalt. Vorstellungen bilden per se – insbesondere wenn wir in der Lage sind sie als dynamische Größen in einem Denkgefüge bewusst zu machen.

Verfasser: Katja Lengnink

Text und Bilder sind frei zum Wiederabdruck

Auswahl zusätzlich verfügbarer Bilder

Texte, Bilder und Zusatzmaterial

www.extrakte.uni-siegen.de

Kontakt:

Prof. Dr. Katja Lengnink
Universität Siegen
Telefon: XX49 (0)271 740 3633
Telefax: XX49 (0)271 740 3583
katja@hartung-lengnink.de
Didaktik der Mathematik

Herausgeber
Der Rektor der Universität Siegen
Presse- und Informationsstelle Universität Siegen

Redaktion
Dipl. Medienw. Michael Hellermann (verantw.)
Christian Hensel
Telefon ++49 271 740 4923
Telefax ++49 271 740 4911
hellermann@presse.uni-siegen.de
extrakte@presse.uni-siegen.de
www.extrakte.uni-siegen.de
Herrengarten 3
57068 Siegen

Layout, Satz
Michael Hellermann / Peter Büdenbender

Druck
UniPrint

Bildnachweis

Titelblatt
Oben: Universität Siegen: Christian Hensel / Michael Hellermann; Spalte 1: Universität Siegen /Jürgen Naber;
Spalte 2: Universität Siegen; Spalte 4: Universität Siegen /Jürgen Naber

Diskret oder Kontinuierlich
S. 2: Luiz L. Gonçalves Copyright[1]; S. 3: Universität Siegen / Christian Hensel

Axiome und Maxime. Was Ethik und Mathematik verbindet
S. 4: Universität Siegen / Jürgen Naber; S. 5, links: wikipedia; rechts: Universität Siegen / Tobias Heer
S. 6, oben: Universität Siegen / Jürgen Naber; links: Universität Siegen / Tobias Heer; rechts: Universität Siegen / Jürgen Naber
S.7: Universität Siegen: Jürgen Naber; S. 8: Universität Siegen / Jürgen Naber; Portrait: Universität Siegen / Michael Wagener

Von faulen Krediten, Wahrscheinlichkeiten und dem Risiko
S. 9: Universität Siegen; S. 10, Graphik: Universität Siegen / Annabelle Kehl; Bild: Jay Miller;
S. 11 Graphik: Universität Siegen / Annabelle Kehl; Bild: Universität Siegen / Christian Hensel
S. 13, Portrait: Universität Siegen / Michael Wagener

Strombörsen: Börsen unter Strom
S. 13: www.business-illustrationen.de; S. 14 oben: Universität Siegen: Alfred Müller / Christian Hensel;
unten: www.business-illustrationen.de; S. 15 www.business-illustrationen.de; S. 16: Universität Siegen / Alfred Müller
S. 17, Portrait: Michael Wagener

Mathematiklehrerbildung neu denken
S. 18 oben: Universität Siegen / Jürgen Naber; unten: Stadtbibliothek Nürnberg Copyright[2];
S. 19 oben: Universität Siegen / Christian Hensel; unten: Jill Enders; S. 20 oben: Universität Siegen / Heinrich und Peter Eberle;
unten: Telekom-Stiftung; S. 21: Universität Siegen: Jürgen Naber / Christian Hensel; S.22, 23: David Aderhold und Emma Friedrich;
S. 24, Portrait oben: Universität Siegen / Michael Wagener; Portrait unten: Mathematikum Gießen

Vorstellungen bilden
S. 25: Universität Siegen / Jill Enders; S. 26, Illustration: Universität Siegen /Christian Hensel; Bild: Universität Siegen / Jill Enders;
S. 27 oben: Universität Siegen: Norman van Rennings; unten: Universität Siegen; S. 28: Universität Siegen / Jill Enders;
S. 29: Universität Siegen / Norman van Rennings; Portrait: Universität Siegen/ Michael Wagener

Michael Wagener:	www.superwuggy.de
Jürgen Naber:	www.flashfotos.de
Peter Büdenbender:	www.zettb.de
Business Illustrationen:	www.business-illustrationen.de