1 Einleitung / Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie

a) $\frac{1+2i}{3i+2}$

b) $\frac{(1+2i)(2-3i)}{(1+2i)(2-2i)}$

c) $\|2+3i\|$

d) $\left\|\frac{2+3i}{2+2i}\right\|$

e) $\left\|(2+i)^3\right\|$

f) $e^{i\pi}$

g) $e^{i2\pi+2}$

Aufgabe 1.2 Betrag und Phase

Berechnen Sie Betrag und Phase von

a) $1+i$

b) $1-i$

c) $\frac{1}{1+2i\omega}$

d) $2e^{i\pi}$

Aufgabe 1.3 Integration

Berechnen Sie

a) Einfaches Integral

$$\int\limits_0^\pi \cos(t-\frac{\pi}{2})dt$$

b) Faltungsintegral (Zeit t als Parameter)

$$\int\limits_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

mit $g(t)=\sin(t)$ und $f(t)=1$.

Aufgabe 1.4 Komplexe Zahlenebene

Skizzieren Sie für eine komplexe Zahl z in der komplexen Zahlenebene den Bereich in dem folgendes gilt

a) $\|z\| \leq 1$

b) $\mathrm{Re}(z) < 0$

c) $\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} < 0.9$

d) $\|z-4\|^2 \leq 2$

Aufgabe 1.5 Grenzwerte für Brüche

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{s\to 0} \frac{s^2+2s+1}{s^2+2}$

b) $\lim\limits_{s\to \infty} \frac{s^2+2s+1}{s^2+2}$

3 Linearisierung nichtlinearer Systeme

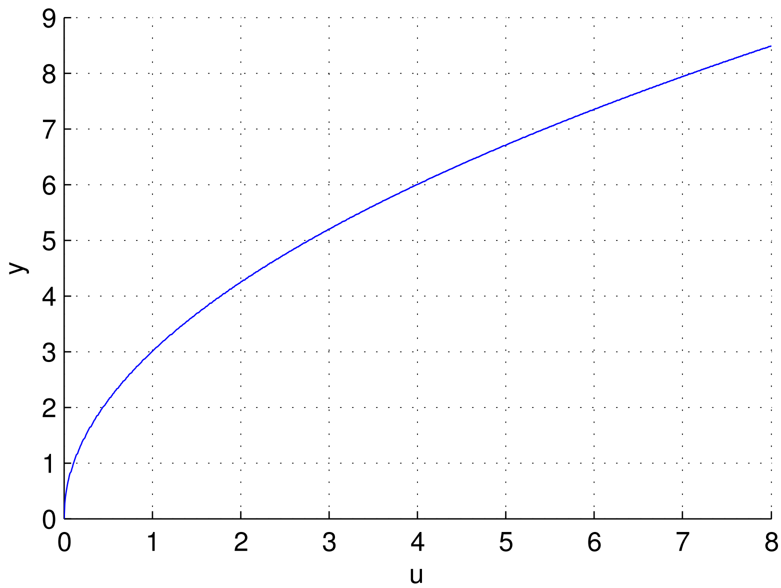
Aufgabe 3.1 Grundlagen der Linearisierung

Gegeben ist die Funktion

$$y(t) = 3 \cdot \sqrt{u(t)}$$

a) Linearisieren sie die Funktion um einen allgemeinen Arbeitspunkt u_0. Geben sie sowohl eine Beziehung der Größen relativ zum Arbeitspunkt an $\Delta y(t) = f(\Delta u, u_0)$, als auch die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen $y_{\text{lin}}(t) = f(u, u_0)$.

b) Stellen sie die Linearisierung für den Arbeitspunkt $u_0 = 4$ grafisch im folgenden Diagramm dar:



Aufgabe 3.2 Linearisierung eines mathematischen Pendels

Gegeben ist ein mathematisches Pendel mit der Masse m, der Stablänge l und der Erdbeschleunigung g. Der Stab des Pendels sei masselos und die Reibung im Gelenk wirke als lineare Torsionsdämpfung $M_R = d_R \cdot \dot{\varphi}$.

a) Stellen sie die Bewegungs-Differentialgleichung $f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ auf.

b) Linearisieren sie die DGL um den stationären Arbeitspunkt $\varphi_0 = 0°$.

4 Laplace-Transformation

Aufgabe 4.1 Transformation in den Bildbereich

Bestimmen Sie mit Hilfe des Additionsssatzes (Überlagerung) und der Korrespondenztabelle die Bildfunktionen für folgende Originalfunktionen:

a) $x(t) = 5e^{-2t} + 2\sin(4t)$

b) $x(t) = 4\sin(2t) - 2\cos(2t)$

c) $x(t) = 2t - 2 + e^{-t}$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integrationssatzes und der Korrespondenztabelle die Bildfunktionen für folgende Originalfunktionen:

d) $x(t) = \int\limits_0^t \left(1 - e^{-2\tau}\cos(2\tau)\right) \mathrm{d}\tau$

e) $x(t) = \int\limits_0^t \left(\tau e^{-0,5\tau} - e^{-\tau}\right) \mathrm{d}\tau$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Dämpfungssatzes und der Korrespondenztabelle die Bildfunktionen für folgende Originalfunktionen:

f) $x(t) = e^{-3t}\left(\sin(2t) - 0{,}5\cos(2t)\right)$

g) $x(t) = e^{-2t}\left(1 - 2t + t^2\right)$

Aufgabe 4.2 Transformation in den Zeitbereich

Transformieren Sie die folgende Bildfunktion mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in den Zeitbereich und bestimmen Sie $x(t \to 0+)$ und $x(t \to \infty)$ mit Hilfe der Grenzwertsätze:

$$X(s) = \frac{6(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Aufgabe 4.3 Anwendung der Laplace-Transformation

Betrachten Sie das in Abbildung 1 dargestellte mechanische System.

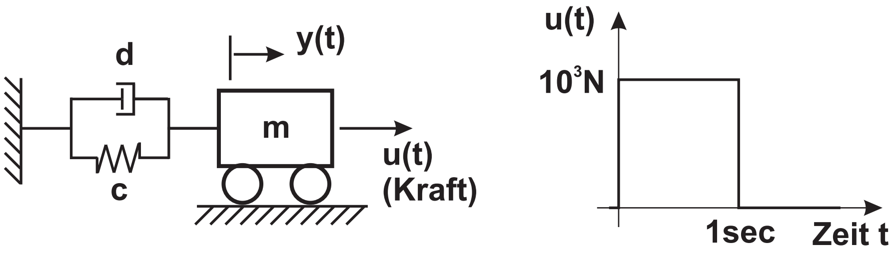


Abbildung 1: Anwendung der Laplace-Transformation

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$y(0) = 0,1\,m\ , \qquad \dot{y}(0) = -0{,}1\,m/s$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das System durch die ebenfalls in Abbildung 1 dargestellte Kraft angeregt. Die Zahlenwerte der Systemparameter lauten:

$$m = 10^4\,kg\ , \qquad c = 10^4\,N/m\ , \qquad d = 2 \cdot 10^4 Ns/m$$

Berechnen Sie den Verlauf von $y(t)$ unter Zuhilfenahme der Korrespondenztabelle.

5 Übertragungsfunktion

Aufgabe 5.1 Umformung eines Blockschaltbildes

Ermitteln Sie mit Hilfe der Rechenregeln aus dem Skript (Kapitel 4.6 Rechenregeln) die Gesamtübertragungsfunktion $G_{ges}(s)$ des abgebildeten Blockschaltbildes.

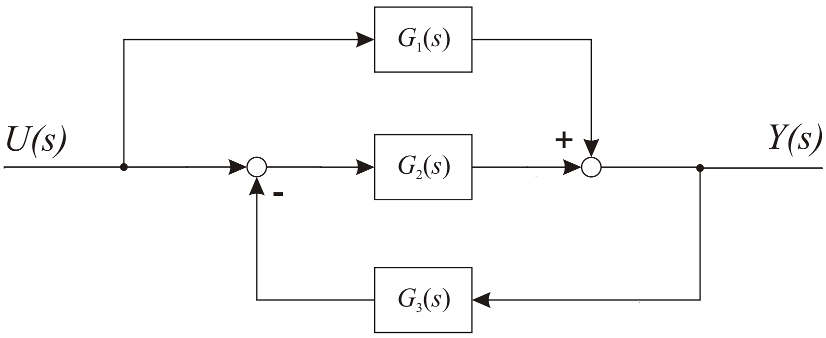


Abbildung 2: Aufgabe 5.1 Anwendung der Laplace-Transformation

6 Frequenzgang und Ortskurve

Aufgabe 6.1 Bode-Diagramm

Berechnen Sie den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen:

$$G(s) = \frac{4(1+s)}{s(1+5s)}, \text{ bzw. } G_{NPM}(s) = \frac{4(1-s)}{s(1+5s)}$$

Zeichnen Sie außerdem die asymptotischen Frequenzkennlinien dieses Systems in das auf Seite 6 abgebildete Bode-Diagramme.

Aufgabe 6.2 Globales Verhalten von Systemen

Gegeben sind folgende Übertragungsfunktionen:

$$G_1(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+4s+16}\ , \qquad G_2(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}\ , \qquad G_3(s) = \frac{s}{s+5}$$

Ordnen Sie diese Übertragungsfunktionen den auf Seite 7 abgebildeten Bodediagrammen, Frequenzgangortskurven und Sprungantworten zu. Begründen Sie Ihre Wahl.

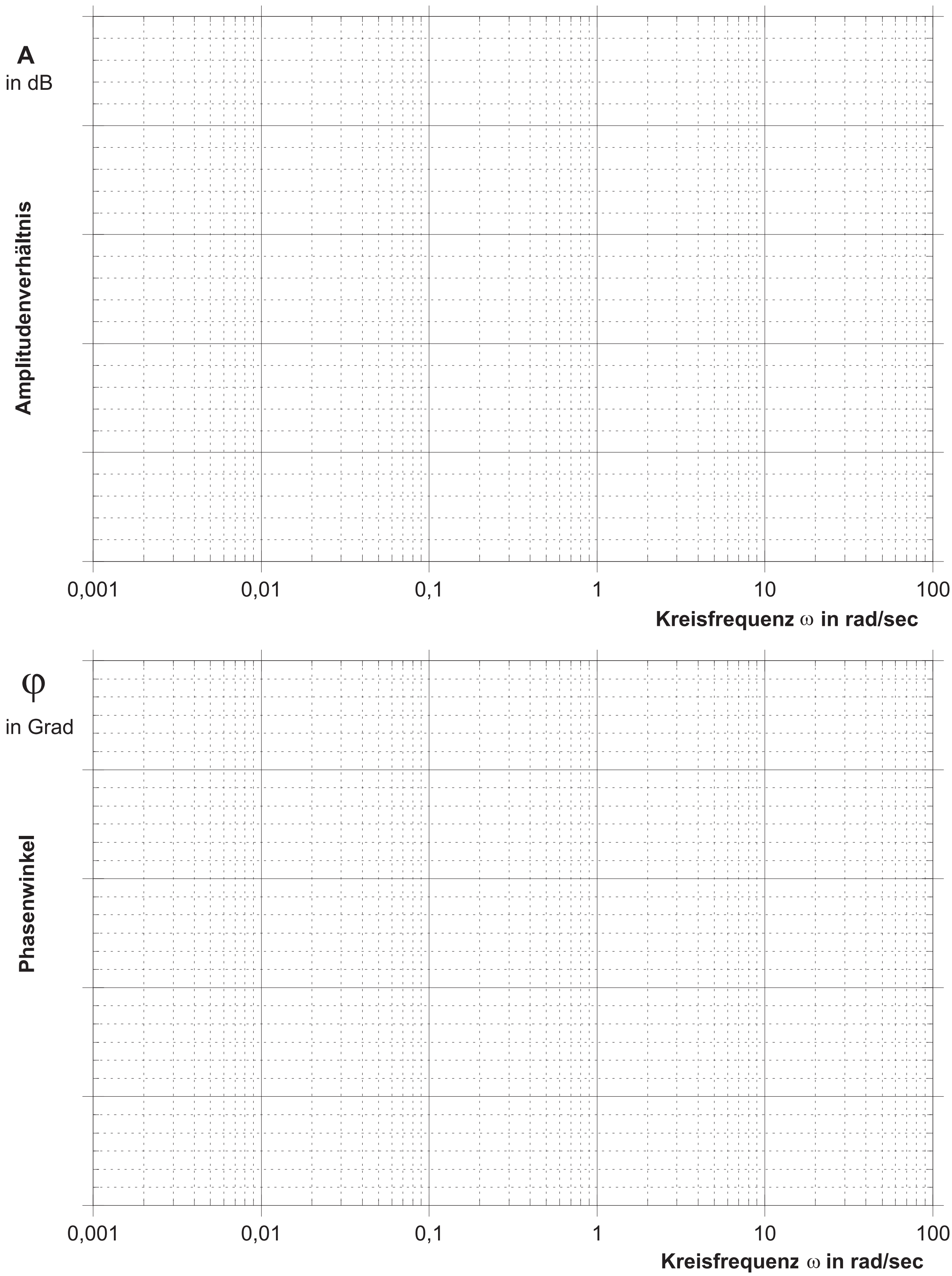


Abbildung 3: Bodediagramm für Aufgabe 6.1

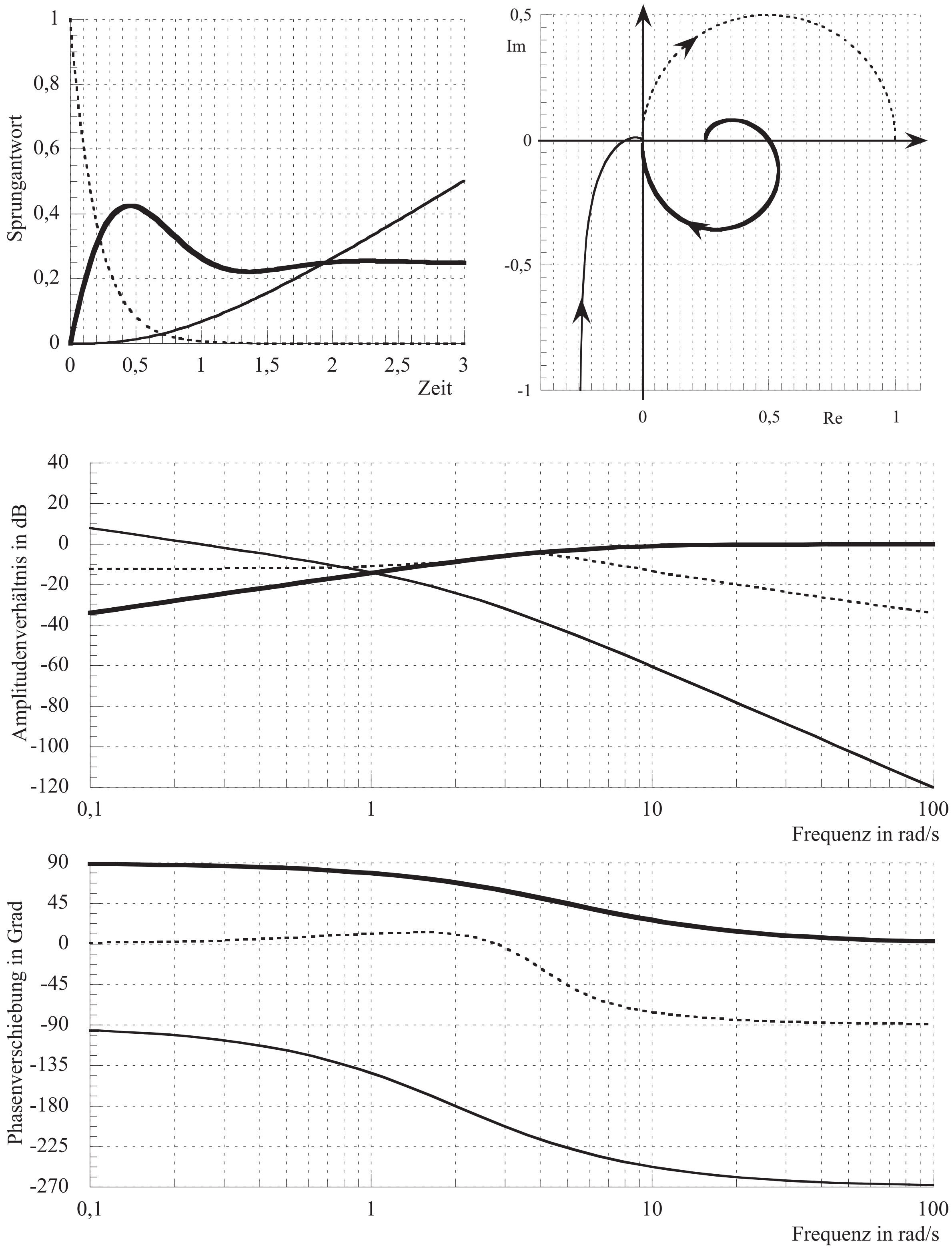


Abbildung 4: Sprungantworten, Bodediagramme und Ortskurven für Aufgabe 6.2

8 Stabilität linearer Systeme

Aufgabe 8.1 Stabilität von Übertragungsfunktionen

Beurteilen Sie die Stabilität folgender Übertragungsfunktionen:

a) $G(s) = \dfrac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}$ b) $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{(s+1)(s-2)}$

Aufgabe 8.2 Stabilität eines Regelkreises mit 2 Reglerparametern

Die Strecke $G_S(s)$ soll mit einem PI-Regler $G_R(s)$ geregelt werden:

$$G_S(s) = \frac{2}{s^2 + 0{,}5s + 2}\ , \qquad G_R(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_n s}\right).$$

Berechnen Sie, für welche Reglerparameter K_P und T_n der geschlossene Regelkreis stabil ist. Zeichnen Sie ein Stabilitätsdiagramm für K_P und T_n. Kann bei $T_n = 2$ die Regelung instabil werden?

Aufgabe 8.3 Amplituden- und Phasenreserve (vereinf. Nyquistkriterium)

Bestimmen Sie die Amplituden- und Phasenreserve für das System aus Aufgabe 8.2 für die Reglerparameter $K_P = 0{,}5$ und $T_n = 1$ aus dem Bodediagramm und aus der Ortskurve auf Seite 9. Ist das geregelte System stabil?

Aufgabe 8.4 Regelkreis mit Regelstrecke mit Totzeit (vereinf. Nyquistkrit.)

Beurteilen Sie an Hand des Bodediagramm und der Ortskurve auf Seite 10 die Stabilität des geregelten Systems mit der folgenden Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises:

$$G_0(s) = \frac{0{,}85}{s^2 + 0{,}8s + 1} e^{-8s}$$

Aufgabe 8.5 Regelkreis mit instabiler Regelstrecke (allg. Nyquistkriterium)

Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises mit dem Reglerparameter K_P lautet:

$$G_0(s) = K_P \frac{s+2}{s(s-1)}$$

Für die Reglerparameter $K_P = 0{,}5$ und $K_P = 2$ ist jeweils eine Frequenzgangsortskurve des offenen Regelkreises ermittelt worden (siehe Abbildung 7). Für welchen Fall ist die Regelung stabil?

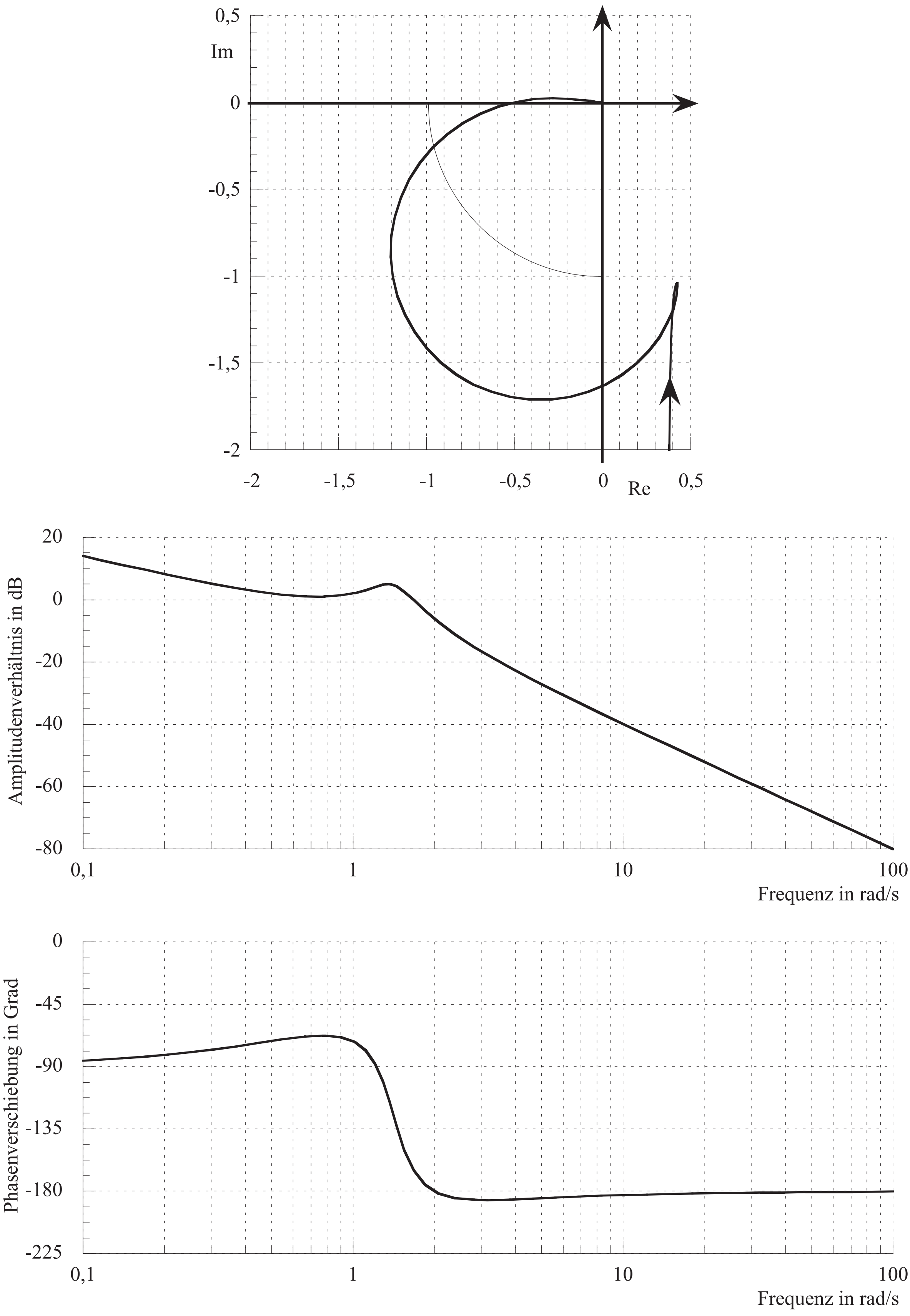


Abbildung 5: Bodediagramm und Ortskurve zu Aufgabe 8.3

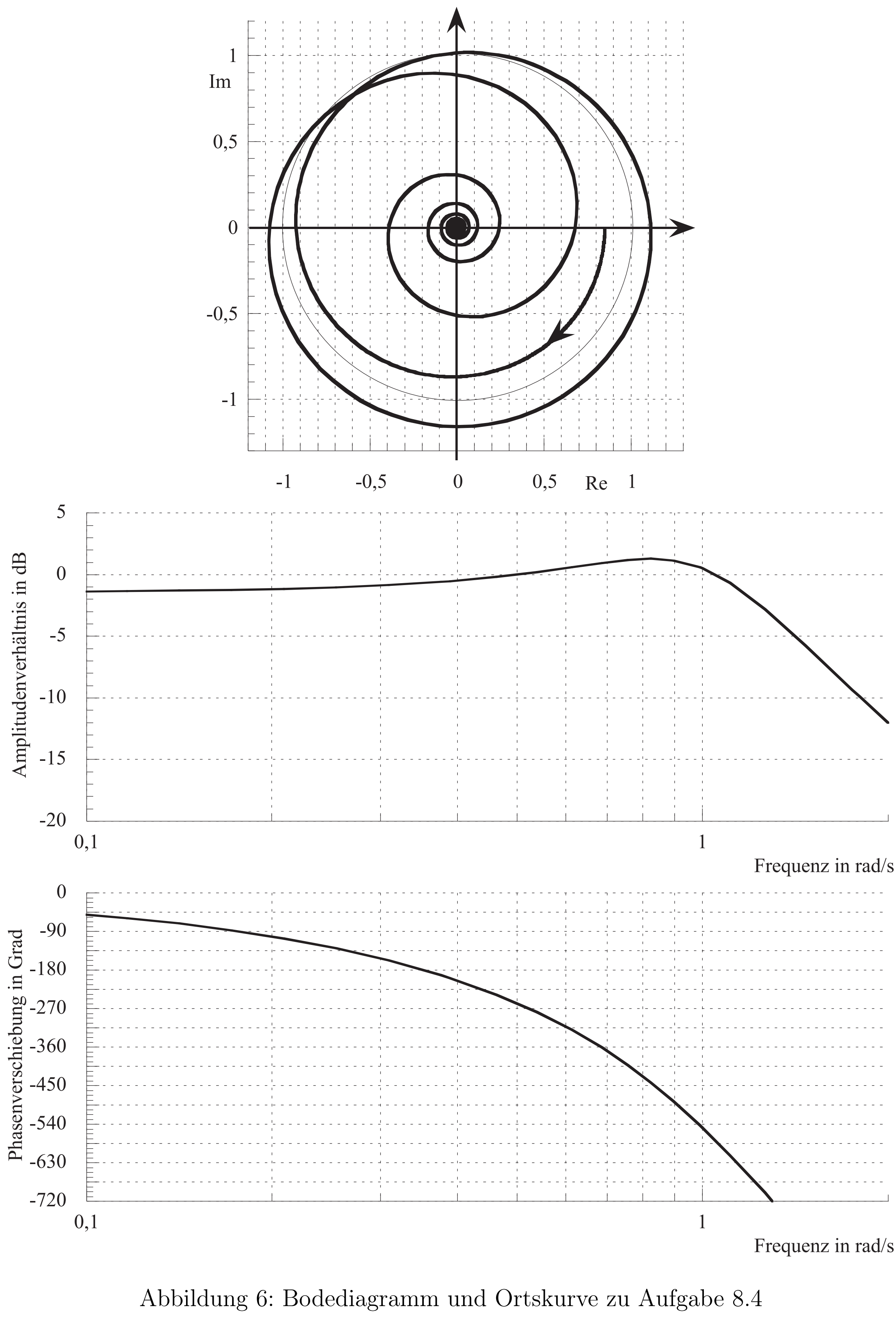


Abbildung 6: Bodediagramm und Ortskurve zu Aufgabe 8.4

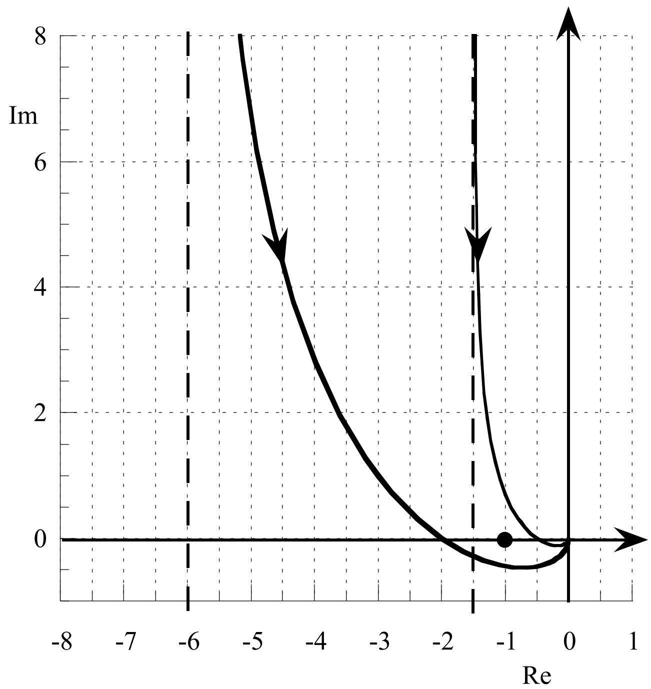


Abbildung 7: Frequenzgangsortskurve zu Aufgabe 8.5

10 Einfache lineare Regler

Aufgabe 10.1 Herleitung der Führungs- und Störübertragungsfunktionen

Leiten Sie für den Standardregelkreis die Gleichungen für die Ausgangsgröße $Y(s)$ und für den Regelfehler $E(s)$ in Abhängigkeit der Führungsgröße $W(s)$ und der Störgrößen $D_i(s)$ (Störung am Streckeneingang) und $D(s)$ (Störung am Streckenausgang) her.

Aufgabe 10.2 Regelung einer Strecke mit globalem P-Verhalten (statische Anforderungen)

Gegeben sind ein P-Regler $G_R(s)$ und die Regelstrecke $G_S(s)$:

$$G_R(s) = K_P \ , \qquad G_S(s) = \frac{2}{s+2}$$

Das statische Verhalten des Regelkreises für $t \to \infty$ soll untersucht werden.

a) Bestimmen Sie die bleibende Regelabweichung $e(t \to \infty)$ bei einem Führungssprung. Wie groß muss K_P gewählt werden, damit der Regelfehler kleiner als 10% bleibt.

b) Ermitteln Sie einen statischen Vorfilter für die Führungsgröße, um den Regelfehler auf Null zu bringen. Was ist der Nachteil dieser Methode?

c) Zeigen Sie, dass bei Verwendung eines Reglers mit I-Anteil (z.B. PI-Regler) unabhängig von der Wahl der Reglerparameter der bleibende Regelfehler verschwindet (Stabilität des geschlossenen Regelkreises vorausgesetzt). Was ist der Vorteil gegenüber der Verwendung des P-Reglers mit einem statischen Vorfilter?

d) Zeigen Sie, dass auch der statische Einfluss der Störgrößen (am Eingang und Ausgang der Regelstrecke) bei Annahme einer sprungförmigen Störung verschwindet, wenn ein Regler mit I-Anteil verwendet wird.

Aufgabe 10.3 Dynamische Anforderungen an den Regelkreis

Gegeben ist eine Regelstrecke und ein P-Regler:

$$G_R(s) = K_P \ , \qquad G_S(s) = \frac{4}{s\,(s+4)}$$

Der Reglerparameter K_P soll nun so gewählt werden, dass bestimmte dynamische Anforderungen an den Regelkreis erfüllt werden.

a) Ermitteln Sie die den Reglerparameter K_P so, dass das geregelte System bei einem Führungssprung eine maximale relative Überschwingweite Δm von 20% aufweist. Nach welcher Zeit $T_{ü}$ wird dieses Maximum erreicht?

b) Wählen Sie den Reglerparameter so, dass die Beruhigungszeit $T_{be}(5\%)$ 2 Sekunden beträgt. Ist es auch möglich den Regler so auszulegen, dass die Ausgangsgröße bereits nach 1 Sekunde das 5%-Toleranzband nicht mehr verlässt?

13 Wurzelortskurve (WOK)

Aufgabe 13.1 Konstruktion der Wurzelortskurve

Gegeben sind die Übertragungsfunktionen des offenen Regelkreises $G_0(s)$:

$$G_0(s) = K \cdot \frac{s+0{,}5}{(s+0{,}5)(s+2)(s^2+2s+2)}$$

a) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen und Pole, den Schnittpunkt s_A der Asymptoten mit der reellen Achse und die Asymptotenwinkel Ψ_i. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Größen die Wurzelortskurve.

b) Berechnen Sie die kritische Verstärkung K_{krit}, bei dessen Überschreitung der geschlossene Regelkreis instabil wird.

Aufgabe 13.2 Konstruktion der WOK einer instabilen Regelstrecke

Gegeben ist der Standardregelkreis mit der Übertragungsfunktion $G_R(s)$ für den Regler und $G_S(s)$ für die Strecke:

$$G_R(s) = K \ , \qquad G_S(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s-1)}$$

a) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen und Pole sowie den Verzweigungspunkt s_V auf der reellen Achse. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Größen die Wurzelortskurve.

b) Lässt sich mit Hilfe des P-Reglers eine stabile Regelung erzielen? Für welche Verstärkung K_{krit}, wird der geschlossene Regelkreis instabil.

15 Vertiefungen und Erweiterungen des Standardregelkreises

Aufgabe 15.1 Realisierung einer Vorsteuerung

Das System mit der Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

soll so gesteuert, bzw. geregelt werden, dass es ein vorgegebenes Führungsverhalten $G_F(s)$ aufweist.

a) Geben Sie ein sinnvolles $G_F(s)$ vor und berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Steuergliedes $G_V(s)$. Was sind die Nachteile einer solchen Steuerung?

b) Um die Nachteile der Steuerung zu umgehen, ergänzen Sie das System um einen Regelkreis. Berechnen Sie die Führungs- und Störübertragungsfunktion des geregelten Systems.

c) Das geregelte System weist nun nicht mehr das gewünschte Führungsverhalten $G_F(s)$ auf. Woran liegt das? Wie muss der Regelkreis modifiziert werden, damit das geregelte System wieder das gewünschte nominelle Führungsverhalten hat?

Aufgabe 15.2 Störgrößenaufschaltung

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild eines geregelten Systems mit einer Störung, die über das Übertragungsglied $G_T(s)$ auf den Systemausgang wirkt. Der Störeinfluss soll durch eine Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ eliminiert werden.

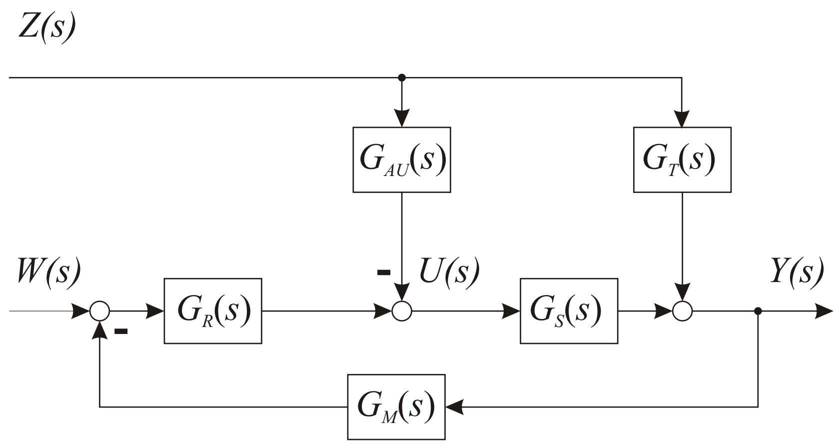


Abbildung 8: Blockschaltbild eines Regelkreises mit Störgrößenaufschaltung

a) Leiten Sie die Übertragungsfunktionen $G_W(s)$ und $G_Z(s)$ für das Gesamtsystem her.

b) Berechnen Sie aus $G_Z(s)$ die Übertragungsfunktion $G_{AU}(s)$, die für die vollständige Unterdrückung der Störung benötigt wird. Zeigen Sie, wie $G_{AU}(s)$ auch direkt aus dem Blockschaltbild abgelesen werden kann.

c) Gegeben ist eine Streckenübertragungsfunktion $G_S(s)$ und drei verschiedene Übertragungsfunktionen $G_{Ti}(s)$ für die Störung:

$$G_S(s) = \frac{s+1}{(s+4)(s+5)}\ , \quad G_{T1} = \frac{1}{(s+3)^2}\ , \quad G_{T2} = \frac{1}{s+3}\ , \quad G_{T3} = 3 \cdot \frac{s+2}{s+3}$$

Berechnen Sie $G_{AU}(s)$ für alle drei Fälle. In welchem Fall ergibt sich eine nicht realisierbare Aufschaltung.

d) Berechnen Sie für den nicht realisierbaren Fall eine statische und zwei dynamische Näherungslösungen für $G_{AU}(s)$.

e) Für den Regler und das Messglied gilt: $G_R(s) = 10$ und $G_M(s) = 1$. Simulieren Sie die Antwort des geregelten Systems auf einen Störsprung für alle drei Näherungslösungen und ohne Störgrößenaufschaltung.

Aufgabe 15.3 Mehrgrößenregelung und Entkopplung

Gegeben ist folgende Regelstrecke mit 3 Stellgrößen U_i und 3 Regelgrößen Y_i ($i = 1, 2, 3$).

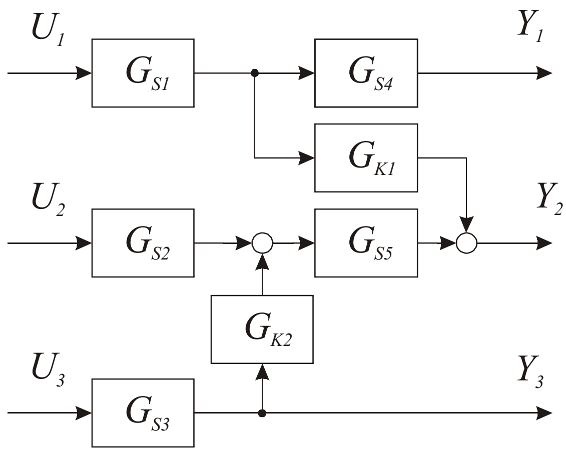


Abbildung 9: Regelstrecke mit 3 Ein- und Ausgangsgrößen

a) Stellen Sie die Gleichungen der Regelstrecke auf und berechnen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{S}(s)$, wobei $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{S}(s) \cdot \mathbf{U}(s)$ gilt. Welche kanonische Struktur hat die Strecke?

b) Welche der drei Reglerstrukturen A, B oder C, wählen Sie, um das System zu regeln? Begründen Sie Ihre Wahl!

c) Zeichnen Sie das vollständige Blockschaltbild, bestehend aus gewähltem Regler und gegebener Regelstrecke. Ermitteln Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{R}(s)$ des gewählten Reglers, wobei $\mathbf{U}(s) = \mathbf{R}(s) \cdot \mathbf{E}(s)$ gilt.

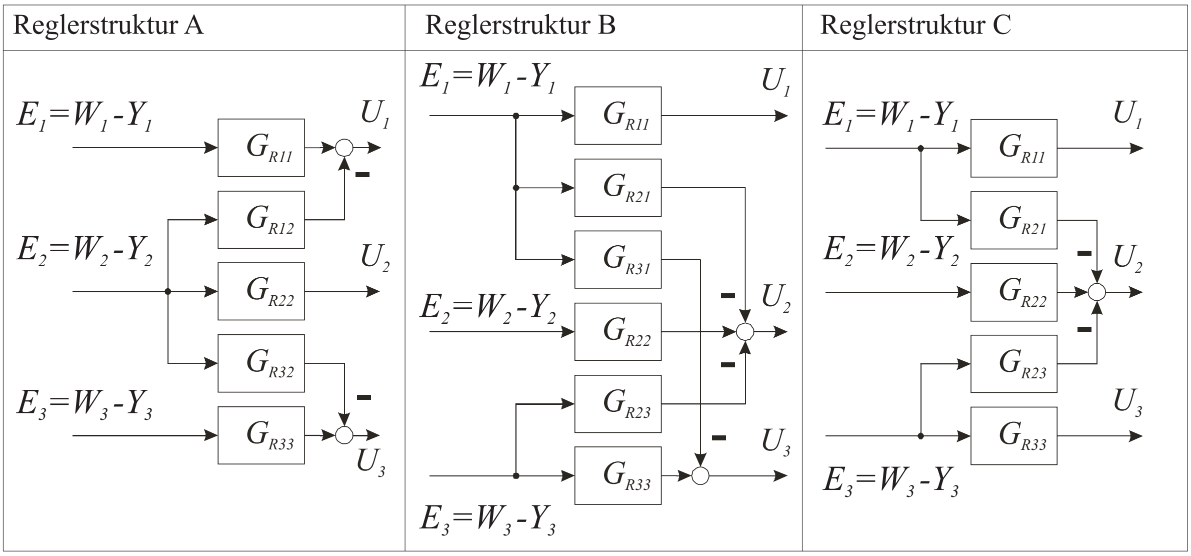


Abbildung 10: Drei verschiedene Reglerstrukturen

d) Berechnen Sie die benötigten Entkopplungsglieder $R_{ij}(s) = G_{Rij}(s)$, mit $i \neq j$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand des Blockschaltbildes.

e) Die Regelstrecke besteht aus folgenden Teilstrecken:

$$G_{S1} = \frac{2}{3s+1}\ , \quad G_{S2} = \frac{1}{s+1}\ , \quad G_{S3} = \frac{1}{s(s+2)}\ , \quad G_{S4} = \frac{4}{s}\ , \quad G_{S5} = \frac{5}{s+2}$$

Führen Sie für das vollständig entkoppelte System einen Reglerentwurf durch. Verwenden Sie dabei zunächst P-Regler $G_{R11} = K_1$, $G_{R22} = K_2$ und $G_{R33} = K_3$.

Bestimmen Sie die stabilen Bereiche der Reglerparameter (Hurwitzkriterium) und überprüfen Sie, ob für alle drei Regelkreise der Regelfehler verschwindet. Sollte dies bei einem Regelkreis nicht der Fall sein, wählen Sie einen Regler, der den Regelfehler eliminiert. Bestimmen Sie in diesem Fall ebenfalls die stabilen Bereiche der Reglerparameter.

f) Die Koppelelemente der Strecke haben folgende Übertragungsfunktionen:

$$G_{K1} = 4\ , \qquad G_{K2} = \frac{3}{s+2}$$

Überprüfen Sie mit diesen Koppelelementen und den unter e) bestimmten Reglern, ob die unter d) berechneten Entkopplungsglieder realisierbar sind! Sollte dies nicht der Fall sein, schlagen Sie eine geeignete statische und eine näherungsweise dynamische Entkopplung vor.

Aufgabe 15.4 Internal Model Control (IMC)

Unten abgebildet sehen Sie einen Internal Model Control Regelkreis, bestehend aus einer Strecke $S(s)$, einem Regler $R(s)$ und einem Streckenmodell $M(s)$.

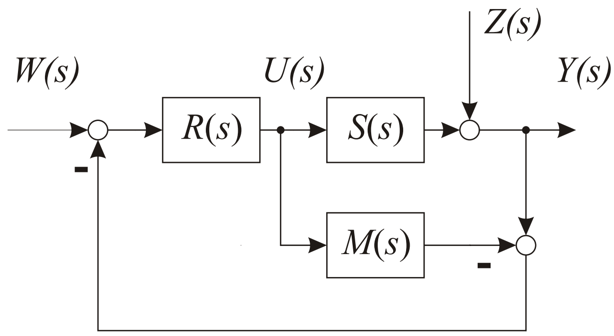


Abbildung 11: Internal Model Control (IMC) Regelkreis

a) Leiten Sie die Führungs- und Störübertragungsfunktion dieses Regelkreises her.

b) Wie vereinfachen sich die Führungs- und Störübertragungsfunktion, wenn ein exaktes Modell der Strecke $M(s) = S(s)$ angenommen wird?

c) Unter der Annahme eines exakten Modells soll die Führungsübertragungsfunktion einen gewünschten Wert $F(s)$ annehmen. Wie muss dazu der Regler $R(s)$ gewählt werden? Ist es möglich eine beliebiges $F(s)$ vorzugeben?

d) Was muss bei der Wahl von $F(s)$ berücksichtigt werden. Wählen Sie $F(s) = \frac{1}{1+2s}$ und skizzieren Sie qualitativ die Antwort des Systems auf einen Führungs- und einen Störsprung.

16 Nichtlineare Regelung

Aufgabe 16.1 Eigenschaften nichtlinearer Systeme

a) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine eindeutige und eine mehrdeutige nichtlineare Kennlinie an.

b) Geben Sie Beispiele für nichtlineare Diffenzialgleichungen an.

c) Zeigen Sie jeweils an einem Beispiel, dass bei nichtlinearen Systemen in der Regel das Superpositions- und das Verstärkungsprinzip nicht gilt, sowie, dass die Reihenfolge der Glieder nicht vertauscht werden darf.

d) Bei linearen Systemen sind dynamische Eigenschaften wie Eigenfrequenz, Dämpfung, bzw. Stabilität vom Eingangssignal unabhängig. Gilt dies auch für nichtlineare Systeme?

Aufgabe 16.2 Nichtlineare Kennlinien

Konstruieren Sie mit Hilfe der gegebenen Kennlinien und der gegebenen Eingangssignale die Ausgangssignale der nichtlinearen Übertragungsglieder.

a) Parallelschaltung eines Zweipunktgliedes mit und ohne Hysterese. Siehe Abbildung 12 auf Seite 17.

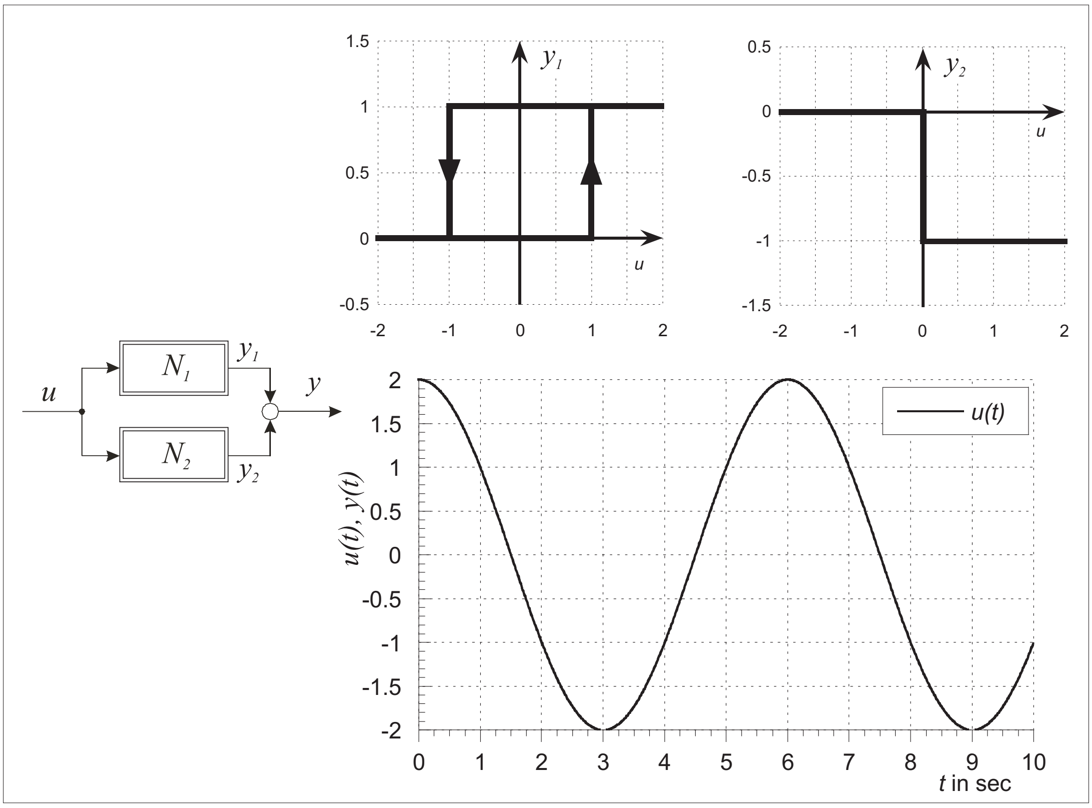


Abbildung 12: Aufgabe 16.2 a)

b) Dreipunktglied mit Hysterese. Siehe Abbildung 13 auf Seite 18

Aufgabe 16.3 Nichtlinearer Regelkreis

Gegeben ist ein Regelkreis mit einem nichtlinearen Messglied (Zweipunkt mit Hysterese) in der Rückführung. Die Anfangsbedingung (Integrator) lautet $x(0) = 0$

a) Konstruieren sie die Antwort des Regelkreises auf eine sprungförmige Änderung der Führungsgröße in das auf Seite 18 abgebildete Diagramm (Abbildung 14).

b) Warum ist das Verhalten der Regelung nicht zufriedenstellend?

c) Wie kann die Regelung verbessert werden? Welche Nachteile treten dabei auf?

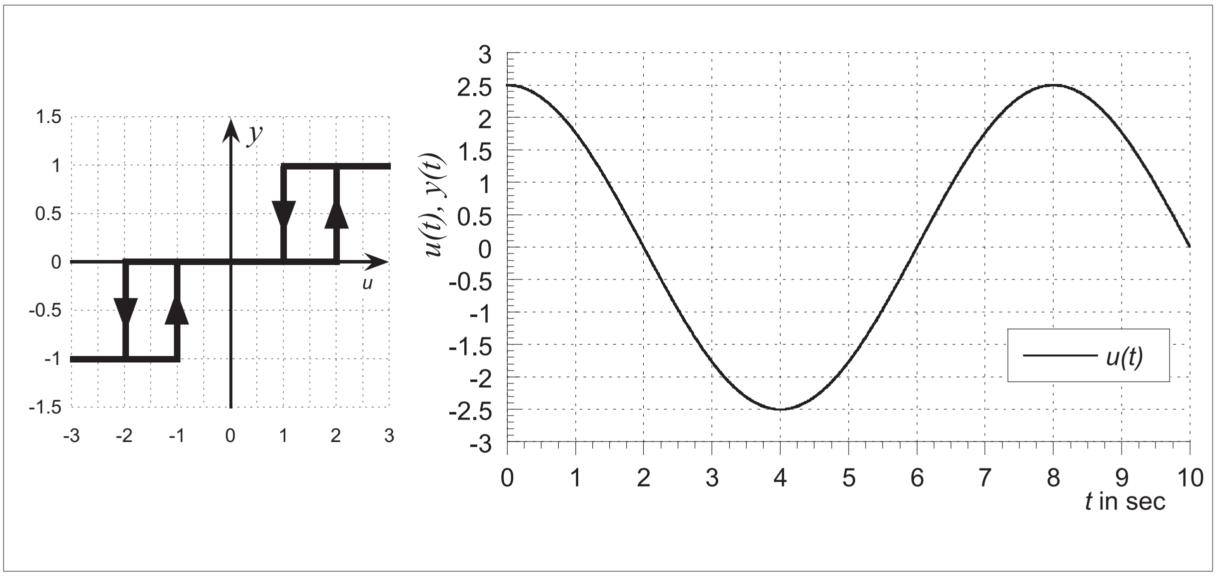


Abbildung 13: Aufgabe 16.2 b)

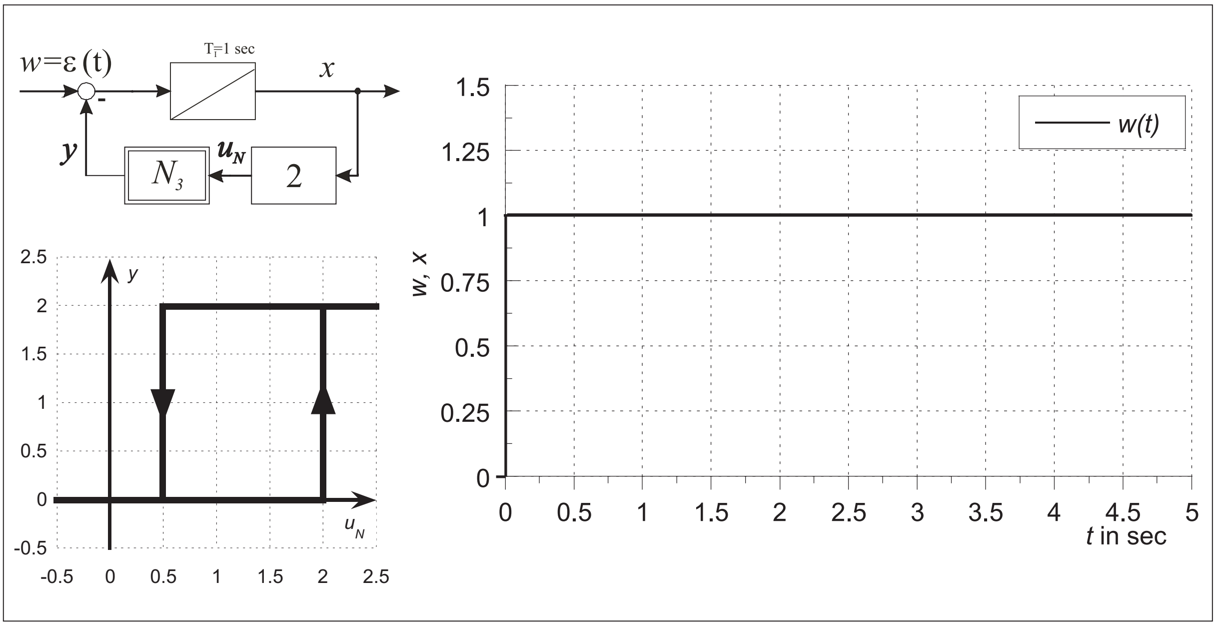


Abbildung 14: Aufgabe 16.3