HÜ3 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Aufgabe HÜ3.1 Linearisierung einer Funktion

Gegeben sei die Funktion

$$y = \frac{1}{2} \cdot (1-u)^2$$

a) Zeichnen sie die Funktion im Intervall $u = [0; 3]$.

b) Linearisieren sie die Funktion um den Arbeitspunkt $u_0 = 2$ und zeichnen sie die linearisierte Funktion in den zuvor gezeichneten Graphen ein.

c) Berechnen sie für $u = \frac{1}{2}$ den Wert y mit Hilfe der ursprünglichen und der linearisierten Funktion.

Aufgabe HÜ3.2 Linearisierung einer Differentialgleichung

Gegeben ist ein System mit folgender nichtlinearen Differentialgleichung

$$2\ddot{y}(t) + 3y^2(t)\,\dot{y}(t) - 6\,y(t)\,\cos y(t) = \sqrt{u(t)}\,\dot{u}(t)$$

a) Bestimmen sie die Ruhelagen (y_R, u_R) des Systems.

b) Linearisieren sie die Differentialgleichung um den Arbeitspunkt $y_0 = \frac{\pi}{2}$, $u_0 = 1$.

HÜ4 Laplace-Transformation

Aufgabe HÜ4.1 Transformation in den Bildbereich

Bestimmen sie die Bildfunktionen für folgende Originalfunktionen

a) $4 + 3\,t - e^{-2\,t}$

b) $3\,t^3 - \sin 4\,t$

c) $e^{-4t}\,\cos 2\,t$

d) $\int\limits_0^t 3\,e^{-\tau} d\tau$

e) $\int\limits_0^t 3\,\tau^2 - 2\,\cos 4\,\tau\; d\tau$

f) $e^{-t}\,(3\,t^3 - \sin 4\,t)$

Aufgabe HÜ4.2 Transformation in den Zeitbereich

Transformieren Sie die folgende Bildfunktion mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in den Zeitbereich und bestimmen sie $y(t \to 0+)$ und $y(t \to \infty)$ mit Hilfe der Grenzwertsätze:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 4\,s}{(s+1)^2\,(s+2)}$$

HÜ5 Übertragungsfunktion

Aufgabe HÜ5.1 Umformung eines Blockschaltbildes

Ermitteln Sie mit Hilfe der Rechenregeln aus dem Skript die Gesamtübertragungsfunktion $G_{ges}(s)$ des abgebildeten Blockschaltbildes.

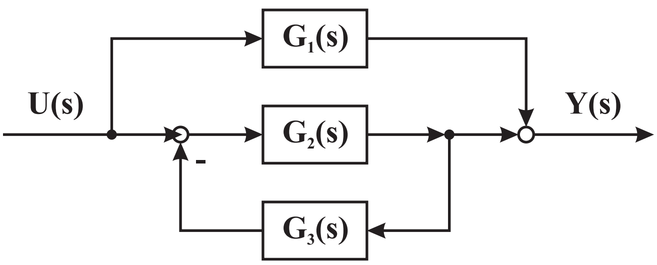


Abbildung 1: Aufgabe HÜ5.1 Umformen eines Blockschaltbildes

Aufgabe HÜ5.2 Übertragungssystem mit Differentialgleichung

Ein Übertragungssystem wird durch die Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) = 4\dot{u}(t) + 8u(t)$$

mit verschwindenden Anfangsbedingung, d.h. $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = u(0) = 0$, beschrieben. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ sowie die Pol-Nullstellenverteilung. Zeichnen Sie das PN-Diagramm.

HÜ6 Frequenzgang und Ortskurve

Aufgabe HÜ6.1 Darstellung von Ausgangssignalen

Gegeben ist ein PT2 mit dem zugehörigen Blockschaltbild in Abbildung 2 und Bodeplot in Abbildung 3 (a). Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

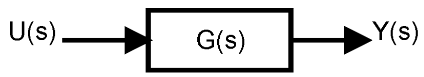
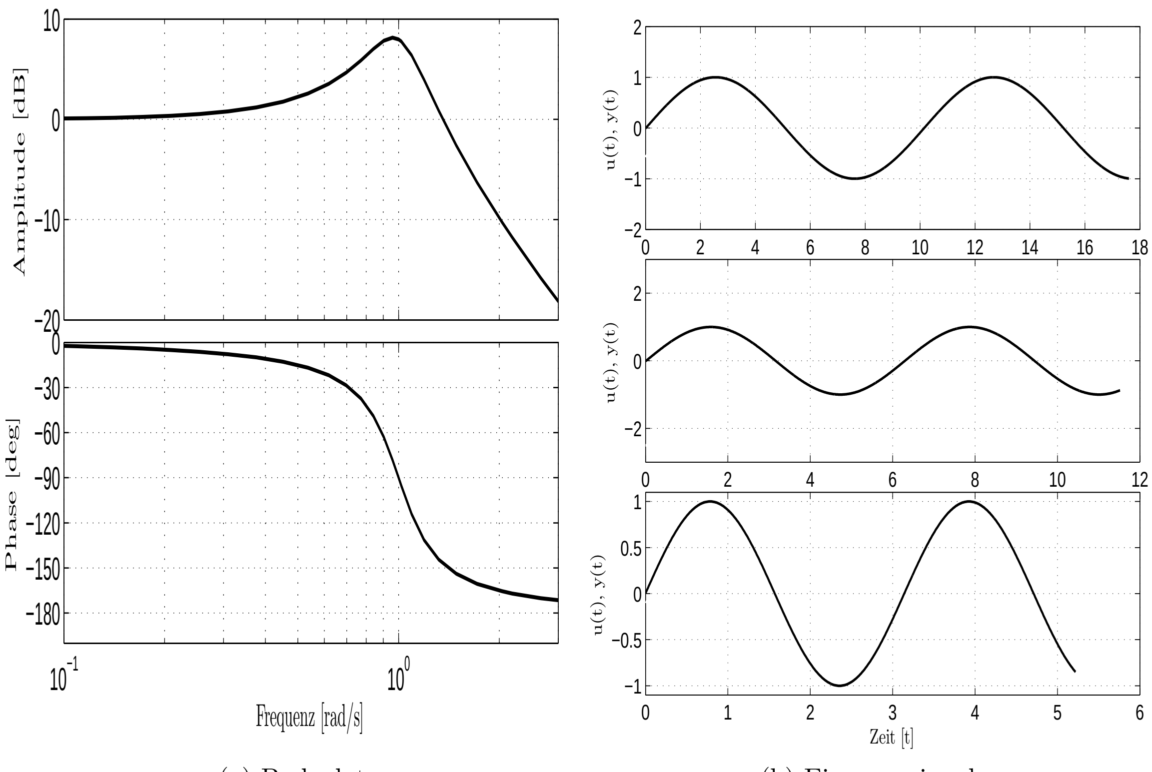


Abbildung 2: Blockschaltbild

a) Wie lässt sich die Überhöhung im Amplitudengang erklären?

b) Die in Abbildung 3 (b) zu sehenden Signale wirken als Eingang auf das gegebene System. Skizzieren Sie die resultierenden Ausgangssignale (im eingeschwungenen Zustand) in das entsprechende Diagramm. Bestimmen Sie hierzu zuerst die Frequenz des Eingangssignals.



(a) Bodeplot (b) Eingangssignale

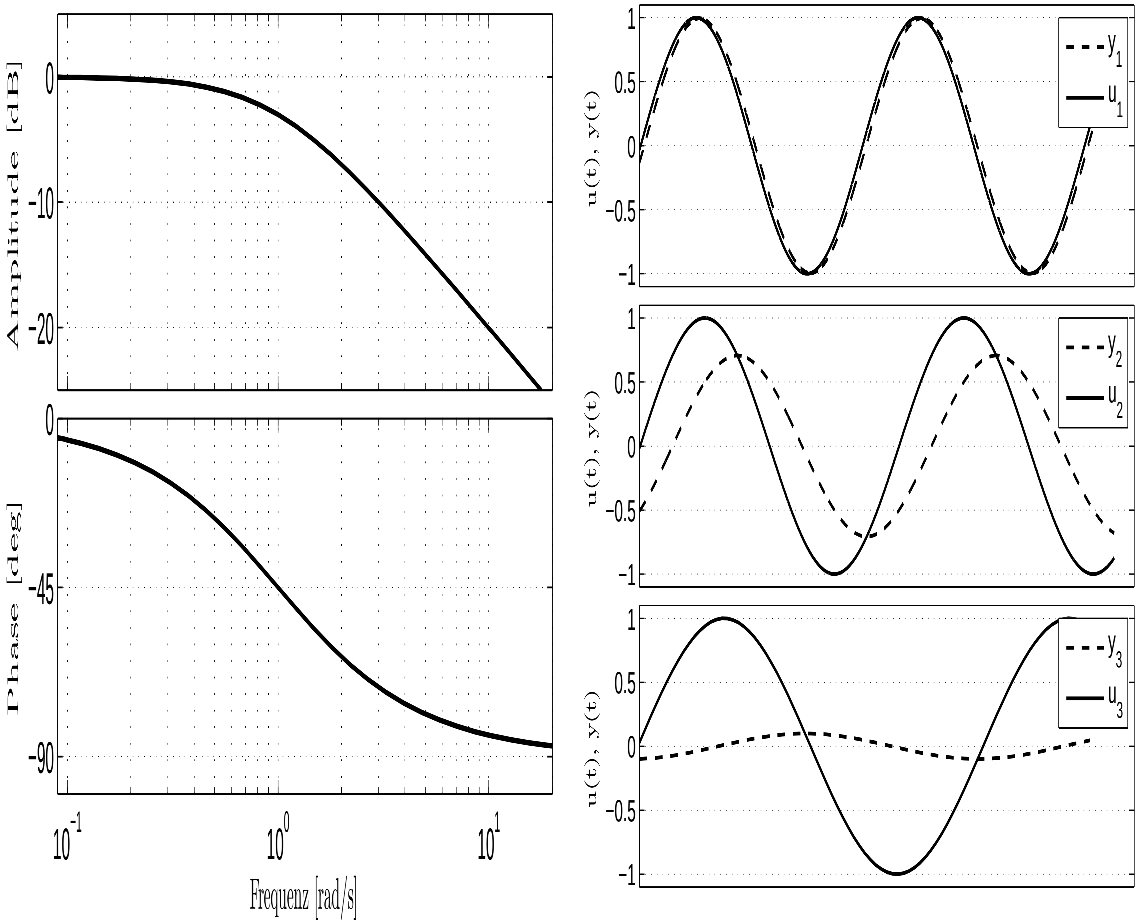
Abbildung 3: Bode-Diagramm und zugehörige Eingangssignale des PT2 Systems

Aufgabe HÜ6.2 Ablesen von Eingangsfrequenzen

In Abbildung 4 (a) ist der Bodeplot eines PT1-Gliedes zu sehen. Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Gegeben sind die Ein-/ und Ausgangssignale in Abbildung 4 (b) im eingeschwungenen Zustand. Das System folgt dem Blockschaltbild in Abbildung 2.



(a) Bodeplot eines PT1-Gliedes (b) Ein-/ und Ausgangssignale

Abbildung 4: Bode-Diagramm und zugehörige Eingangssignale des PT1 Systems

a) Bestimmen Sie die Frequenzen anhand der Verstärkung des Signals.

b) Bestimmen Sie die Frequenzen anhand der Phasenverschiebung.

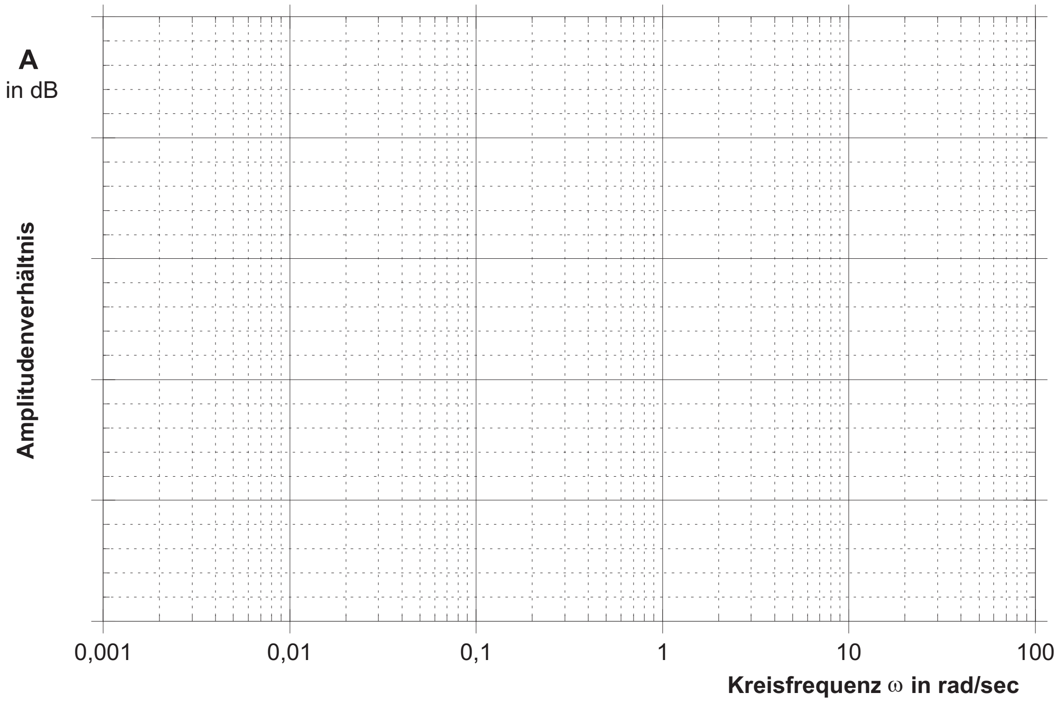
c) Ist die Zuordnung der Frequenz anhand eines Merkmals (Phase oder Amplitude) immer eindeutig?

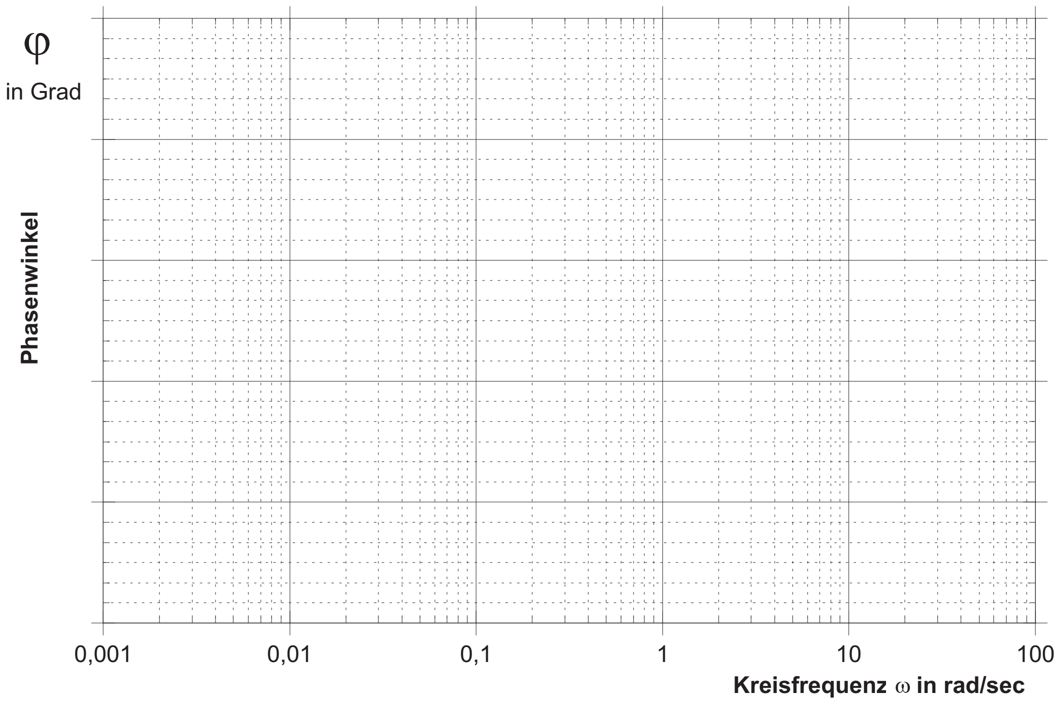
Aufgabe HÜ6.3 Zeichnen von Frequenzgang und Ortskurve

Berechnen Sie den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen:

a) $G(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s+0{,}5)(s+2)}$

Zeichnen Sie außerdem die asymptotischen Frequenzkennlinien dieses Systems in das abgebildete Bode-Diagramm.



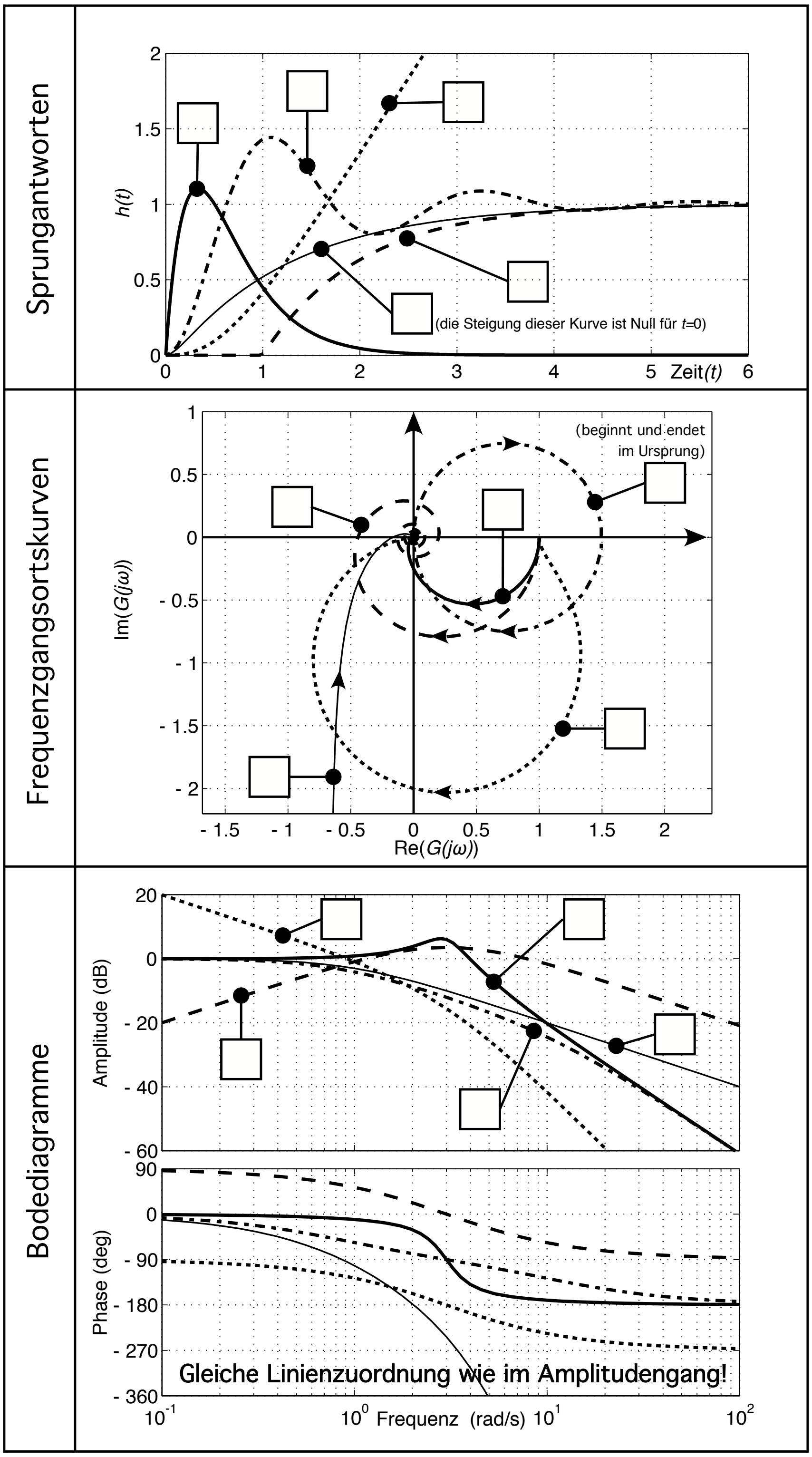


HÜ7 Dynamischer Systeme

Aufgabe HÜ7.1 Verhalten dynamischer Systeme

Ordnen Sie die Kurven in den Diagrammen diesen Systemen zu und geben sie eine kurze Begründung. Hinweis: Alle Bilder sind unabhängig von einander zu betrachten.

A) $\frac{9}{s^2+1{,}5s+9}$ B) $\frac{9}{s^2+12s+9}$ C) $\frac{9}{s(s^2+6s+9)}$ D) $\frac{9s}{s^2+6s+9}$ E) $\frac{1}{s+1}\cdot e^{-s}$



HÜ8 Stabilität linearer Systeme

Aufgabe HÜ8.1 Stabilität von Übertragungsfunktionen

Beurteilen Sie die Stabilität folgender Übertragungsfunktionen:

a) $G(s) = \dfrac{2}{s^2+7}$ b) $G(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3}$

c) $G(s) = \dfrac{1}{s^3-6s^2+3s+10}$ d) $G(s) = \dfrac{5}{s^3+2s^2+4s+10}$

Aufgabe HÜ8.2 Stabilität eines Regelkreises mit 2 Reglerparametern

Gegeben ist ein Standardregelkreis mit der Regelstrecke $G_S(s)$ und dem Regler $G_R(s)$:

$$G_S(s) = \frac{2(s-\frac{1}{4})}{(s-2)(s-1)}, \qquad G_R(s) = K_R(1+T_v s) \text{ mit: } K_R > 0,\ T_v > 0$$

a) Welcher Reglertyp wird hier verwendet? Ist die Strecke stabil und minimalphasig?

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums die Stabilitätsbedingungen des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R und T_v. Hierzu können Sie annehmen, das sowohl K_R als auch T_v größer als Null sind. Zeichnen Sie die Bedingungen in ein Diagramm ein und kennzeichnen Sie den stabilen Bereich.

c) Wie groß darf T_v höchstens gewählt werden, damit das geregelte System durch die geeignete Wahl von K_R überhaupt noch stabilisiert werden kann? Markieren Sie diesen grenzstabilen Fall im Stabilitätsdiagramm.

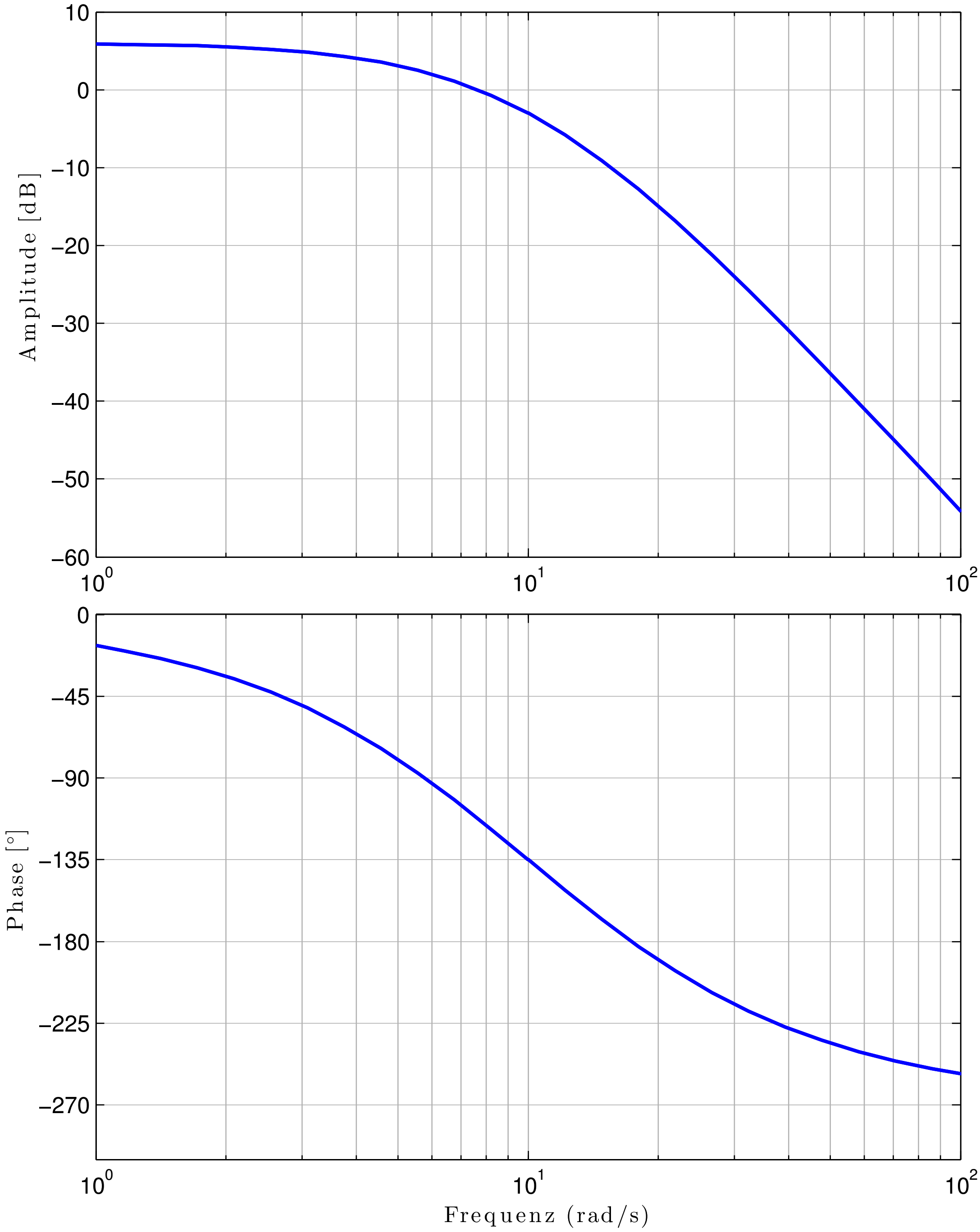
HÜ9 Robuste Stabilität

Aufgabe HÜ9.1 Amplituden- und Phasenreserve (graphisch und analytisch)

Die Stabilität eines linearen, dynamischen Systems soll anhand seines Amplituden- und Phasengangs untersucht werden. Das System besteht aus einem Regler G_R und Strecke G_{S1}:

$$G_R(s) = K, \qquad G_{S1}(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{10}\cdot s\right)^3}$$

a) Mit einer Reglerverstärkung $K = 2$ ergibt sich folgender Amplituden- und Phasengang. Lesen sie aus dem Diagramm den Amplituden- und Phasenrand ab.



b) Erläutern sie **kurz** was der Amplituden- und Phasenrand aussagt. Ist der geschlossene Regelkreis mit G_{S1} stabil?

c) Die Regelstrecke habe abweichend von a) zusätzlich eine Totzeit T_t:

$$G_{S2}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{10} \cdot s\right)^3} \cdot e^{-T_t\, s}$$

Leiten Sie den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\varphi(\omega)$ des totzeitbehafteten offenen Regelkreises $G_0 = G_R(s) \cdot G_{S2}(s)$ her.

d) Ist das System bei einer Reglerverstärkung $K = 2$ und einer geringen Totzeit von nur $T_t = 0{,}2\,\text{sec}$ stabil? Berechnen Sie dazu den Phasenrand.

HÜ10 Einfache lineare Regler

Gegeben ist eine Regelstrecke mit globalem I-Verhalten:

$$G_S(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

a) Zeigen Sie, dass auf Grund des I-Anteils in der Strecke ein P-Regler ausreicht, um einen bleibenden Regelfehler $e(t \to \infty)$ bei einer sprungförmigen Änderung der Führungsgröße oder der Störgröße am Ausgang der Regelstrecke zu vermeiden.

b) Verschwindet der Regelfehler auch, wenn die sprungförmige Störung am Eingang der Regelstrecke angreift?

c) Die Regelgröße soll einer rampenförmigen Änderung der Führungsgröße ohne bleibenden Regelfehler folgen können. Zeigen Sie, dass dies nur möglich ist, wenn ein zusätzlicher I-Anteil in den Regelkreis eingebracht wird (z.B. PI-Regler). Was bedeutet in diesem Zusammenhang der Begriff des inneren Modells.

HÜ12 Reglerentwurf mittels Kompensation

Ein Regelkreis mit einer Strecke, die durch die Differentialgleichung $y(t)+3\,\dot{y}(t) = 3\,u(t)$ beschrieben wird, soll durch einen Kompensationsregler geregelt werden. Das Gesamtübertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises soll folgende Eigenschaften aufweisen: PT_1-Verhalten, Einschwingzeit ca. 6 Sekunden, keine bleibende Regelabweichung.

a) Wie lautet die Übertragungsfunktion der Strecke im Bildbereich?

b) Wie muss die Gesamtübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lauten?

c) Geben sie die Übertragungsfunktion des gesuchten Kompensationsreglers an.

d) Ist der Regler realisierbar?

e) Benennen sie die Teilglieder des Reglers.

HÜ13 Wurzelortskurve (WOK)

Aufgabe HÜ13.1 Konstruktion der Wurzelortskurve

Gegeben ist die Übertragungsfunktionen des offenen Regelkreises $G_0(s)$:

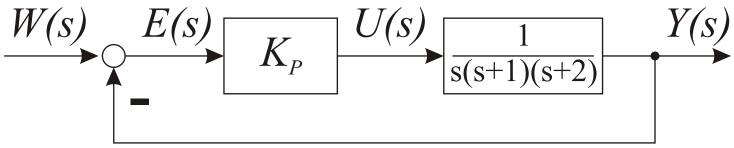
$$G_0(s) = K \cdot \frac{(s+0{,}5)(s+1)}{(s+0{,}5)(s+2)(s^2+2s+2)}$$

a) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen und Pole, den Schnittpunkt s_A der Asymptoten mit der reellen Achse und die Asymptotenwinkel Ψ_i. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Größen die Wurzelortskurve.

b) Berechnen Sie die kritische Verstärkung K_{krit}, bei dessen Überschreitung der geschlossene Regelkreis instabil wird.

Aufgabe HÜ13.2 Wurzelortskurve

Ein Standardregelkreis mit einem P-Regler und Regelstrecke soll im Hinblick auf sein Stabilitätsverhalten untersucht werden.



a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve bei Variation der Reglerverstärkung K_P. Ermitteln Sie dazu die Anzahl der Äste, die im Unendlichen enden, den Schnittpunkt s_A der Asymptoten mit der reellen Achse sowie die Asymptotenwinkel Ψ_l. Zeichnen Sie den Verzweigungspunkt s_V auf der reellen Achse ein.

b) Markieren Sie in der Wurzelortskurve die Punkte, bei denen eine kritische Reglerverstärkung K_{krit} vorliegt. **Eine genaue Berechnung ist nicht erforderlich!**

HÜ15 Vertiefungen und Erweiterungen

Aufgabe HÜ15.1 Vektor- und Matrizenrechnung

a) Berechnen Sie die folgende Vektorsumme.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie die folgende Matrixsumme.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie das folgende Matrizenprodukt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie das *Skalarpodukt* $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{d}$.

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [1 \quad 2] \ , \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e) Berechnen Sie das *dyadische* Produkt $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}^{\mathrm{T}}$.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \qquad \mathbf{d}^{\mathrm{T}} = [3 \quad 4]$$

f) Zeigen Sie, dass man das nachfolgende Gleichungssystem in der Matrix-Vektor Schreibweise $\mathbf{x} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$ darstellen kann.

$$\begin{aligned} x_1 &= S_{11} \cdot u_1 + S_{12} \cdot u_2 \\ x_2 &= S_{21} \cdot u_1 + S_{22} \cdot u_2 \\ x_3 &= S_{32} \cdot u_2 \end{aligned}$$

g) Können Matrizen und Vektoren beliebiger Größe miteinander addiert (subtrahiert) oder multipliziert werden?

h) Ist die Reihenfolge der Multiplikation von Bedeutung?

i) Wie multipliziert man einen Vektor oder eine Matrix mit einem Zahlenwert (Skalar)?

j) Berechnen Sie die *Transponierte* folgender Matrizen und Vektoren.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \ , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

k) Berechnen Sie die *Determinanten* folgender Matrizen.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

l) Wie ist die *Inverse* einer Matrix definiert? Wozu wird Sie z.B. benötigt? Was ist die Einheitsmatrix **I**?

m) Berechnen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ folgender Matrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

n) Was ist der *Rang* einer Matrix?

o) Was ist eine *singuläre* Matrix?

Aufgabe HÜ15.2 Näherungsweise Realisierung von Übertragungsgliedern

Gegeben ist das ideale PD-Glied

$$G_{\text{ideal}}(s) = K(1 + Ts).$$

a) Berechnen und skizzieren Sie die Sprung- und Rampenantwort des Systems. Warum ist dieses System nicht realisierbar?

b) Durch Hinzufügen eines Verzögerungsgliedes mit der Zeitkonstanten T_1 wird das System realisierbar:

$$G_{\text{real}}(s) = \frac{K(1 + Ts)}{1 + T_1 s}.$$

Berechnen Sie Anfangs- und Endwert der Sprungantwort. Was passiert, wenn T_1 verkleinert ($T_1 \to 0$) wird?

c) Berechnen Sie den genauen Zeitverlauf der Sprungantwort des realisierbaren Gliedes durch inverse Laplace-Transformation. Skizzieren Sie den Verlauf für $K = T = 1$ und verschiedene $T_1 = 0{,}5;\ 0{,}2;\ 2$.

d) Skizzieren Sie für beide Systeme den asymptotischen Amplitudengang. Warum ist insbesondere der Frequenzgang des idealen PD-Gliedes problematisch, wenn hochfrequentes Messrauschen vorliegt?

Aufgabe HÜ15.3 Hilfsstell- und Hilfsregelgrößen

Gegeben sind zwei Regelkreise mit Hilfsstell- bzw. Hilfsregelgröße. Die Regelstrecke besteht aus zwei Teilstrecken $G_{S1}(s)$ und $G_{S2}(s)$ zwischen denen eine Störung angreift.

a) Leiten Sie aus den abgebildeten Blockschaltbildern die Führungs- und Störübertragungsfunktionen der geregelten Systeme her.

b) Welche Vorteile bietet die Einführung solcher Hilfsregelkreise.

c) Die Strecken und Reglerübertragungsfunktionen lauten:

$$G_{S1}(s) = \frac{1}{1 + 2s}\ , \qquad G_{S2}(s) = \frac{1}{4s}\ , \qquad G_R(s) = K_P$$

Bestimmen Sie für den Standardregelkreis (also ohne Hilfsstell- oder Hilfsregelgröße) den Reglerparameter K_P so, dass der geschlossene Regelkreis zwei reelle Pole hat (Dämpfung $D = 1$).

d) Um die Schnelligkeit des Regelkreises abzuschätzen, bestimmen Sie auch die Eigenkreisfrequenz ω_0. Wie muss K_P verändert werden um die Regelung schneller zu machen? Was passiert in diesem Fall mit der Dämpfung D?

e) Zeigen Sie, dass es bei Verwendung einer Hilfsstellgröße (P-Hilfsregler $G_H(s) = K_H$) möglich ist, die Dämpfung auf $D = 1$ festzulegen und trotzdem die Eigenkreisfrequenz des Regelkreises auf z.B. $\omega_0 = 5\,\text{sec}^{-1}$ zu erhöhen.

f) Warum kommt es trotz der reellen Pole bei einem Führungssprung zum Überschwingen der Regelgröße? Wie kann dies verhindert werden?

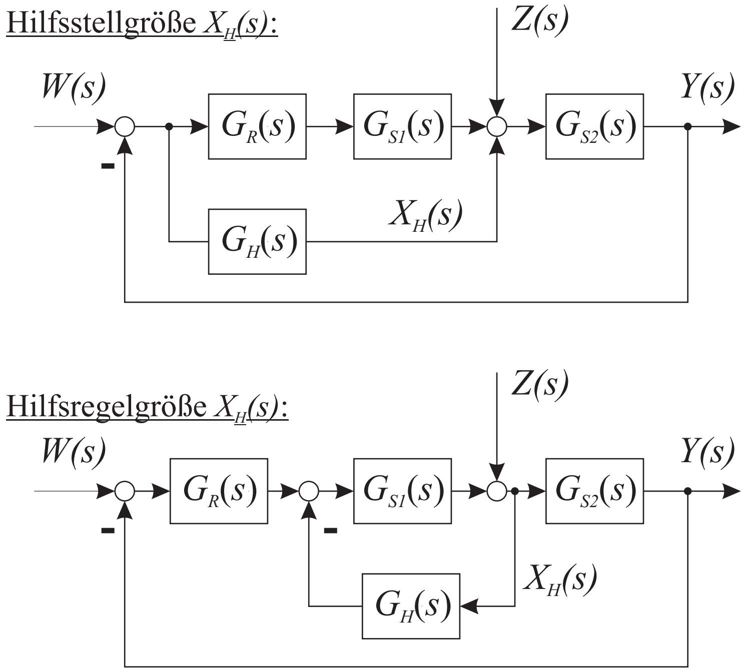


Abbildung 5: Regelkreise mit Hilfsstell- und Hilfsregelgröße

Aufgabe HÜ15.4 Blockschaltbildumformung

Gegeben ist das unten dargestellte System mit zwei Ein- und zwei Ausgangsgrößen.

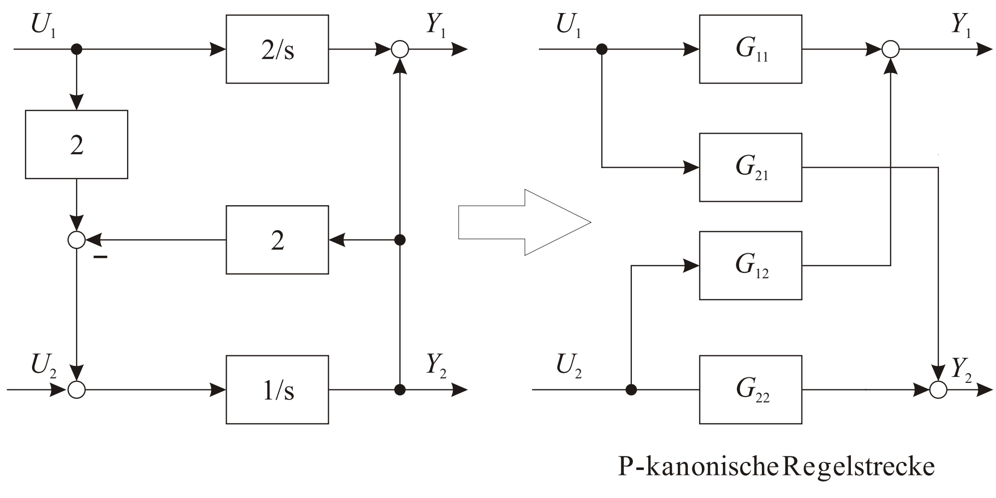


Abbildung 6: Umformung eines Systems in P-Kanonische Form

a) Formen Sie das Blockschaltbild in die dargestellte P-Kanonische Form um.

b) Zeigen Sie, dass das System nun in Matrix-Vektor Schreibweise $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{U}(s)$, mit

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix},$$

dargestellt werden kann.

Aufgabe HÜ15.5 Regelung einer Strecke mit Totzeit

Zur Regelung einer totzeitbehafteten Strecke $G_s(s)$ kann ein modellbasiertes Verfahren nach Smith (Smithprädiktor) verwendet werden. Zur Bildung des Regelfehlers für den Regler $G_R(s)$ wird hierbei das totzeitfreie Modell $G_M(s)$ der Regelstrecke verwendet. Um Störgrößen und Modellungenauigkeiten zu kompensieren, wird noch ein zusätzlicher äußerer Regelkreis verwendet. Hierzu wird der Modellausgang über das Totzeitglied $G_{Tot}(s)$ geleitet und mit der Regelgröße $Y(s)$ verglichen. Es ergibt sich folgendes Blockschaltbild:

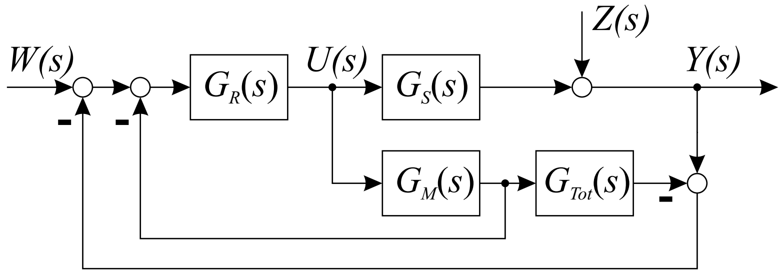


Abbildung 7: Regelung mit einem Smithprädiktor

a) Bestimmen Sie aus obigem Blockschaltbild die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ und die Störübertragungsfunktion $G_Z(s)$ gemäß der Gleichung:

$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_Z(s) \cdot Z(s)$$

b) Nehmen Sie an, das Modell würde die Strecke exakt beschreiben, d.h.:

$G_S(s) = G_M(s) \cdot G_{Tot}(s)$

Wie lauten dann die Übertragungsfunktionen $G_W(s)$ und $G_Z(s)$?

c) Berechnen Sie $G_W(s)$ und $G_Z(s)$ für folgenden Fall (Regelstrecke wird exakt modelliert):

- $G_R(s) = K_P$ (P-Regler)
- $G_S(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s}$
- $G_M(s) = \frac{1}{s}$
- $G_{Tot}(s) = e^{-2s}$

d) Wählen Sie K_P so, dass der Pol des geregelten Systems bei -1 liegt und berechnen Sie die Antworten des Systems auf einen Führungs- und einen Störsprung im Zeitbereich (Lösung mit Hilfe von Korrespondenztabelle und Zeitverschiebungssatz). Skizzieren Sie qualitativ die berechneten Zeitverläufe.

e) Erklären Sie kurz, was durch die Verwendung dieser Methode erreicht wurde. Wo ist der Vorteil gegenüber der Regelung eines totzeitbehafteten Systems mit Hilfe des Standardregelkreises?

HÜ16 Nichtlinearer Regelkreis

Bestimmen Sie den Ausgang $x(t)$ des abgebildeten nichtlinearen Regelkreises für den gegebenen Verlauf der Führungsgröße $w(t)$. Die **Anfangsbedingung** des Integrators beträgt $x(t = 0) = 0$.