Lösungen zur Hausübung Regelungstechnik

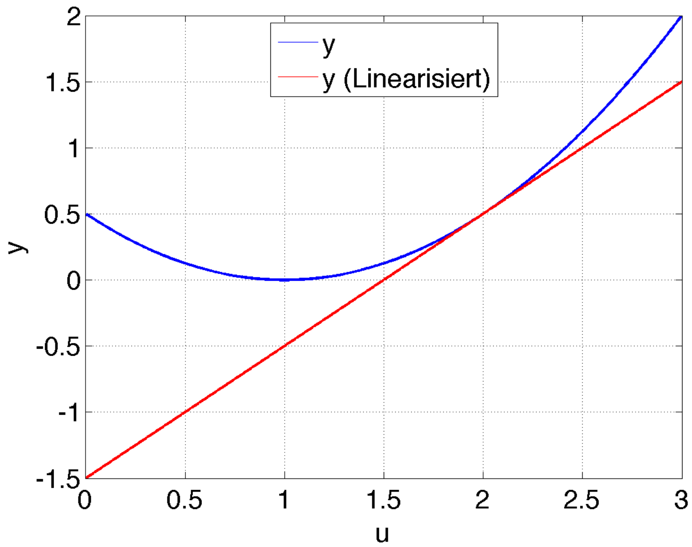
Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

17. Februar 2015

HÜ3 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Aufgabe HÜ3.1 Linearisierung einer Funktion

a) Funktion im Intervall $u = [0; 3]$, sowie linearisierte Funktion aus Aufgabenteil b)



b) Umformen der Funktion zu: $F(u, y) = 0$:

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (1 - u)^2 - y = 0$$

Ableitungen der einzelnen Terme ergibt:

$$\begin{aligned} F_{\text{lin}} &= \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\text{AP}} \cdot \Delta y + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\text{AP}} \cdot \Delta u = 0 \\ &= -1 \cdot \Delta y + (-1 + u_0) \cdot \Delta u \end{aligned}$$

Mit $\Delta u = u - u_0$ und $\Delta y = y_{\text{lin}} - y_0$ folgt:

$$y_{\text{lin}} = (-1 + u_0) \cdot (u - u_0) + y_0$$

y_0 aus $F(u_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} y_{\text{lin}} &= (-1 + u_0) \cdot (u - u_0) + \frac{1}{2} \cdot (1 - u_0)^2 \\ &= (u_0 - 1) \cdot u + \frac{1}{2} \cdot (1 - u_0^2) \end{aligned}$$

$$y_{\text{lin}}(u_0 = 2) = u - \frac{3}{2}$$

c) Berechne Funktionswerte:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$y_{\text{lin}}\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Aufgabe HÜ3.2 Linearisierung einer Differenzialgleichung

a) Die DGL für Ruhelagen lautet:

$$2\ddot{y}_0 + 3y_0^2\,\dot{y}_0 - 6\,y_0\,\cos y_0 = \sqrt{u_0}\,\dot{u}_0$$

In einer Ruhelage sind jedoch alle Ableitungen gleich Null $\dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = \dot{u}_0 = 0$, d.h.

$$-6\,y_0\,\cos y_0 = 0$$

Die Ruhelagen lauten also: u_0 beliebig und $y_0 = 0 \cup \{\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots\}$

b) Die Ausgangsgleichung lautet:

$$F(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{u}, u) = 2\ddot{y}(t) + 3y^2(t)\,\dot{y}(t) - 6\,y(t)\,\cos y(t) - \sqrt{u(t)}\,\dot{u}(t) = 0$$

Die linearisierte Form lautet:

$$F \approx F_{\text{lin}} = \left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right|_A \cdot \Delta\ddot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_A \cdot \Delta\dot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A \cdot \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right|_A \cdot \Delta\dot{u} + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_A \cdot \Delta u$$

Wobei $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}_{\text{lin}}(t) - \ddot{y}_0$, $\Delta\dot{y} = \dot{y}_{\text{lin}}(t) - \dot{y}_0, \ldots$ usw. Zunächst müssen also die partiellen Ableitungen bestimmt werden:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right|_A = 2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_A = 3 \cdot y^2(t)\big|_A = \frac{3}{4}\pi^2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A = -6y(t)\dot{y}(t) - 6\cos y(t) + 6\,y(t)\sin(y(t))\big|_A = 0 + 0 + 6\,\frac{\pi}{2} = 3\pi$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right|_A = -\left.\sqrt{u(t)}\right|_A = -1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_A = -\left.\frac{\dot{u}(t)}{2 \cdot 2\sqrt{u(t)}}\right|_A = 0$$

Damit ist

$$F_{\text{lin}} = 2\,\Delta\ddot{y} + \frac{3}{4}\pi^2\Delta\dot{y} + 3\pi\Delta y - \Delta\dot{u} = 0$$

bzw.

$$2\,\Delta\ddot{y} + \frac{3}{4}\pi^2\Delta\dot{y} + 3\pi\Delta y = \Delta\dot{u}$$

$$2\,(\ddot{y}_{\text{lin}} - \ddot{y}_0) + \frac{3}{4}\,\pi^2\,(\dot{y}_{\text{lin}} - \dot{y}_0) + 3\,\pi\,(y_{\text{lin}} - y_0) = \dot{u}_{\text{lin}} - \dot{u}_0$$

Aus a) ergibt sich, dass $y_0 = \frac{\pi}{2}$, $u_0 = 1$ eine Ruhelage darstellt, d.h. alle Ableitungen $\dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = \dot{u}_0 = 0$! Die linearisierte Form der DGL lautet also:

$$2\,\ddot{y}_{\text{lin}}(t) + \frac{3}{4}\,\pi^2\,\dot{y}_{\text{lin}}(t) + 3\,\pi\,\left(y_{\text{lin}}(t) - \frac{\pi}{2}\right) = \dot{u}_{\text{lin}}(t)$$

HÜ4 Laplace-Transformation

Aufgabe HÜ4.1 Transformation in den Bildbereich (Lösung)

Additionssatz (Folien 114) und Korrespondenztabelle (Folien 131 - 133)
Bestimmen Sie mit hilfe des Additionssatzes (Überlagerung) und der Korrespondenztabelle die Bildfunktion für nachfolgende Originalfunktion.
Additionssatz (Überlegung):

$$\mathcal{L}[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] = a_1 \cdot X_1(s) + a_2 \cdot X_2(s)$$

Tabelle Folie 108
a)

$$x(t) = 4 + 3t - e^{-2t}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \frac{4}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s+2}$$

b)

$$x(t) = 3t^3 - \sin(4t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$X(s) = 3\frac{3!}{s^4} - \frac{4}{s^2+16}$$
$$X(s) = \frac{18}{s^4} - \frac{4}{s^2+16}$$

c)

$$x(t) = e^{-4t}cos(2t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$X(s) = \frac{s+4}{(s+4)^2+4}$$

Man benutzt den Dämfpungssatz mit $e^{-at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+a)F(s+a)$

d)

$$\int_0^t 3e^{-\tau}d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{3}{s^2+s}$$

Man benutzt hierfür $\int_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}F(s)$

e)

$$\int_0^t 3\tau^2 - 2\cos(4\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2+16}$$

f)

$$\mathrm{e}^{-t}(3t^3 - \sin(4t)) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{18}{(s+1)^4} - \frac{4}{(s+1)^2+16}$$

Aufgabe HÜ4.2 Transformation in den Zeitbereich

Transformieren Sie die folgende Bildfunktion mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in den Zeitbereich und bestimmen Sie $y(t \to 0+)$ und $y(t \to \infty)$ mit Hilfe der Grenzwertsätze:

$$y(s) = \frac{s^2+4s}{(s+1)^2(s+2)} \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t) = -4e^{-2t} + 5e^{-t} - 3te^{-t} \quad \lim_{t\to 0} y(t) = 1 \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

HÜ5 Übertragungsfunktion

Aufgabe HÜ5.1 Umformung eines Blockschaltbilds

$$G_{\text{Ges}} = \frac{G_1 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + G_2}{1 + G_2 \cdot G_3}$$

Aufgabe HÜ5.2 Übertragungssystem mit Differentialgleichung

$$G(s) = \frac{8 + 4\,s}{s^3 + 2\,s^2 + 4\,s}$$

Nullstellen von $G(s)$ aus Zähler:

$$(8 + 4\,s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = -2$$

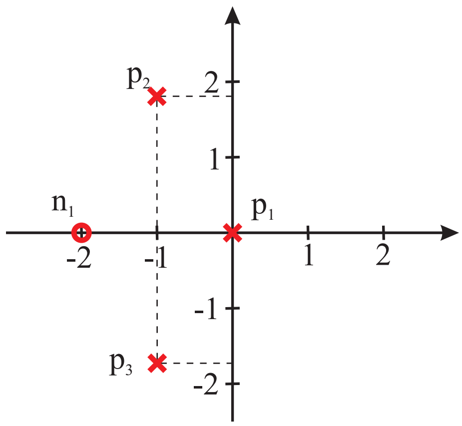
Polstellen von $G(s)$ aus Nenner:

$$p_1 = 0$$

$$p_{2/3} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

Die Übertragungsfunktion kann aus geschrieben werden als

$$G(s) = \frac{4 \cdot (s + 2)}{s \cdot (s + 1 + \sqrt{3}i) \cdot (s + 1 - \sqrt{3}i)}$$



HÜ6 Frequenzgang und Ortskurve

Aufgabe HÜ6.1 Lösung

a) Die Überhöhung folgt aus der schwachen Dämpfung (Skript S. 185):

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1} = \left(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2\right)^{-1} \Rightarrow D = 0.2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) ω aus T bestimmen, dann $|A(\omega)|_{\text{dB}}$ und $\varphi(\omega)$ ablesen ($G(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$):

$$T_1 = 10.15 \text{ (ablesen)} \quad f_1 = \frac{1}{T_1} = 0.0985 \quad \omega_1 = 2f_1\pi = 0.619 \quad |A(\omega)|_{\text{dB}} = 3.3 \text{ (ablesen)}$$

$$A(\omega) = 10^{\left(\frac{|A(\omega)|_{\text{dB}}}{20}\right)} = 1.46 \quad \varphi(\omega) = -21^\circ \text{ (ablesen)}$$

	T	ω	$\lvert A(\omega)\rvert_{\text{dB}}$	$A(\omega)$	φ
Signal 1	10.15	0.619	3.3	1.46	-21°
Signal 2	6.28	1	8	2.5	-90°
Signal 3	3.14	2	-9.9	0.32	-165°

Aufgabe HÜ6.2 Lösung

a) Verstärkung der Signale (aus Amplitudenverhältnis):

$$A(\omega_1) = 0.995 \quad A(\omega_2) = 0.707 \quad A(\omega_3) = 0.1 \quad |A(\omega)|_{\text{dB}} = 20 * \log_{10}(A(\omega))$$

$$|A(\omega_1)|_{\text{dB}} = -0.0435 \quad |A(\omega_2)|_{\text{dB}} = -3.0116 \quad |A(\omega_3)|_{\text{dB}} = -20$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = 0.1 \quad \omega_1 = 1 \quad \omega_1 = 10$$

b) Phase der Signale (Aus Verschiebungsverhältnis):

$$\varphi(\omega_1) = -5.71^\circ \quad \varphi(\omega_2) = -45^\circ \quad \varphi(\omega_3) = -84.29^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = 0.1 \quad \omega_1 = 1 \quad \omega_1 = 10$$

c) Nicht immer eindeutig, da die gleiche Verstärkung/Phase mehrmals im Bodeplot auftreten kann. Beispielsweise treten in der vorherigen Teilaufgabe die Verstärkungen $0 < |A(\omega)|_{\text{dB}}\, 2.5$ sowohl bei Frequenzen unter- als auch oberhalb von $\omega = 0.619$ im Amplitudengang auf.

Wiederholung zu komplexen Zahlen

Für die komplexe Zahl z gilt:

$$z = a + \mathrm{j} \cdot b$$

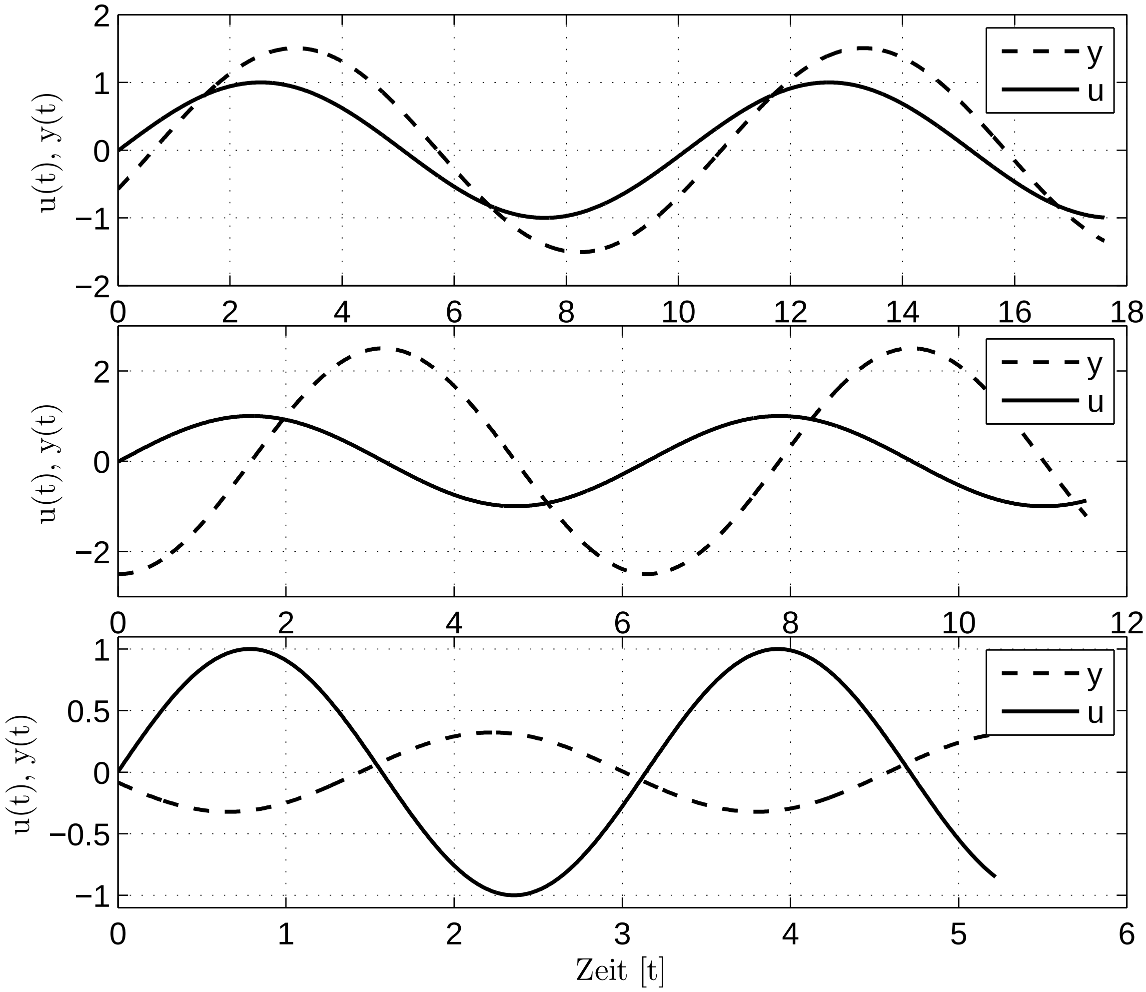


Abbildung 1: Musterlösung – Ausgangssignale zu Eingangssignalen

mit $a = \mathrm{Re}(z)$ (Realteil)
und $b = \mathrm{Im}(z)$ (Imaginärteil)

In der komplexen Ebene dargestellt:

Ihre konjugiert Komplexe lautet:

$$\overline{z} = a - \mathrm{j} \cdot b$$

Der Betrag einer komplexen Zahl ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Um schneller und sicherer die Aufgaben zu lösen, können folgende Rechenregeln verwendet werden:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \,,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \,,$$
$$|z^n| = |z|^n \,.$$

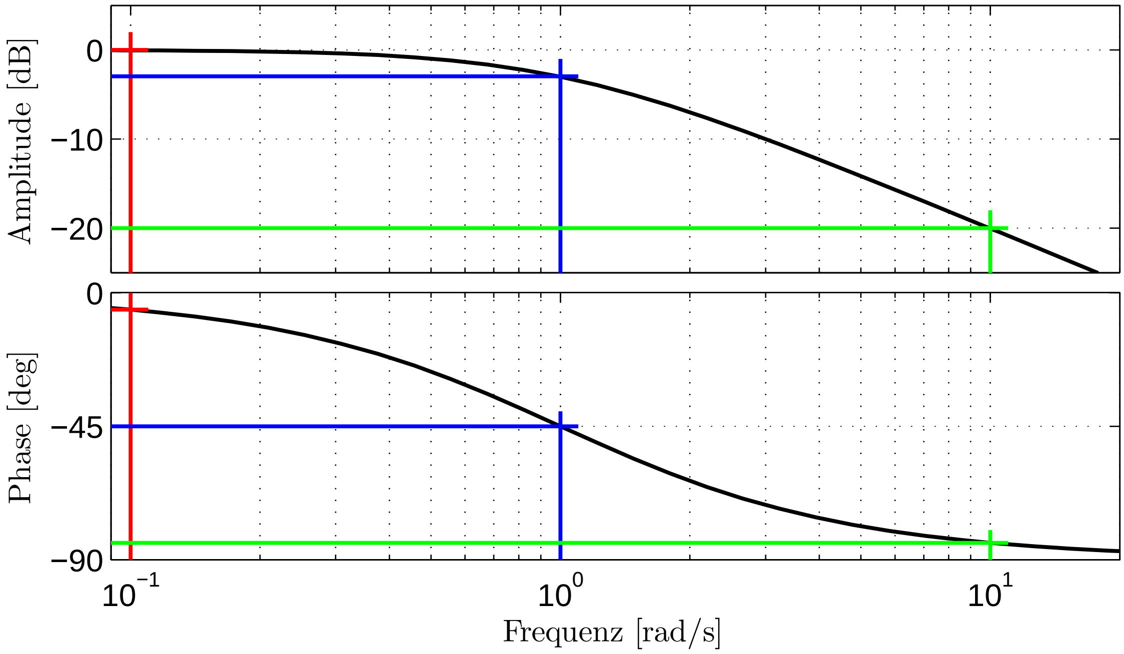
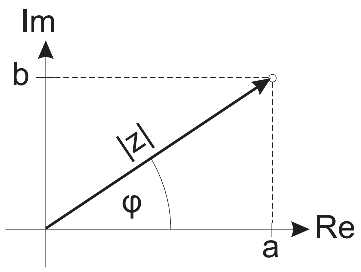


Abbildung 2: Musterlösung – Frequenzen aus Amplitudenveränderung und Phasenverschiebung



Das Argument einer komplexen Zahl ist

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{wenn} \quad a > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{wenn} \quad b \geq 0, a < 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{wenn} \quad b < 0, a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{wenn} \quad b > 0, a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{wenn} \quad b < 0, a = 0 \\ \text{undefiniert} & \text{wenn} \quad b = 0, a = 0 \end{cases}$$

Da diese Fallunterscheidung nicht sehr robust auszuführen ist, bietet es sich an die folgenden Rechenregeln zu verwenden, um die gestellten Probleme zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \arg(z^n) &= n \cdot arg(z) \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2) \end{aligned}$$

Aufgabe HÜ6.3 Bode-Diagramm

Übertragungsfunktionen sollten immer in die Standardform gebracht werden (insbesondere für Asymptotische Funktionen):

- Realteil $= 1$
- s^k-Terme vor dem Bruch

$$\text{Standardform: } G(s) = K s^k \frac{(1+T_{1Z}\,s)(1+T_{2Z}\,s)\ldots}{(1+T_{1N}\,s)(1+T_{2N}\,s)\ldots}$$

Übertragungsfunktion laut Aufgabenstellung

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)\,(s+0.5)\,(s+2)}$$

1) Umformung auf Standardform

$$G(s) = 2\frac{1}{(1+s)\cdot 0.5\,(1+2s)\cdot 2(1+0.5s)}$$

2) s durch $\mathrm{j}\,\omega$ ersetzen

$$G(j\omega) = 2\frac{1}{(1+\mathrm{j}\,\omega)\cdot 0.5(1+2\,\mathrm{j}\,\omega)\cdot 2(1+0.5\,\mathrm{j}\,\omega)}$$

3) in Bestandteile (Glieder) zerlegen

$$G(j\omega) = \underbrace{2}_{\text{P-Glied}} \underbrace{\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega}\cdot\frac{1}{1+2\mathrm{j}\,\omega}\cdot\frac{1}{1+0.5\,\mathrm{j}\,\omega}}_{PT_1\text{-Glieder (siehe Skript 7.2)}}$$

$$A(\omega) = |2|\cdot\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+2\,\mathrm{j}\,\omega}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+0.5\,\mathrm{j}\,\omega}\right|$$

$$\boxed{A(\omega) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4\,\omega^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0.25\,\omega^2}}}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(j\omega) =& \arg(2) + \arg\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+2\,\mathrm{j}\,\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+0.5\,\mathrm{j}\,\omega}\right) \\
& \Downarrow \quad \text{mit } \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2) \quad , \quad \arg(2) = 0^\circ \\
\varphi(j\omega) =& 0^\circ - \arg(1+j\omega) - \arg(1+2j\omega) - \arg(1+0.5j\omega) \\
& \Downarrow \quad \text{mit } \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad , \quad a = 1(\text{Realteil}) \\
& \boxed{\varphi(\omega) = -\left(\arctan(\omega) + \arctan(2\omega) + \arctan(0.5\omega)\right)}
\end{aligned}$$

Verstärkung:

$$K = \lim_{s \to 0} G(s) = 2 \cdot \frac{1}{1 \cdot 0.5 \cdot 2} = 2 = G(s+0)$$
$$K = 20 \cdot \log(2) \approx 6\text{db}$$

Berechnung einiger Werte:

$$\begin{aligned} A(\omega \to 0) &= 2 = 6 \text{ dB entspricht } G(s \to 0) \\ A(\omega = 1) &= 0.57 = -5 \text{ dB} \\ A(\omega \to \infty) &= 0 = -\infty \text{ dB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega \to 0) &= 0° \\ \varphi(\omega \to \infty) &= -270° \end{aligned}$$

Konstruktion des asymptotischen Bodediagramms:

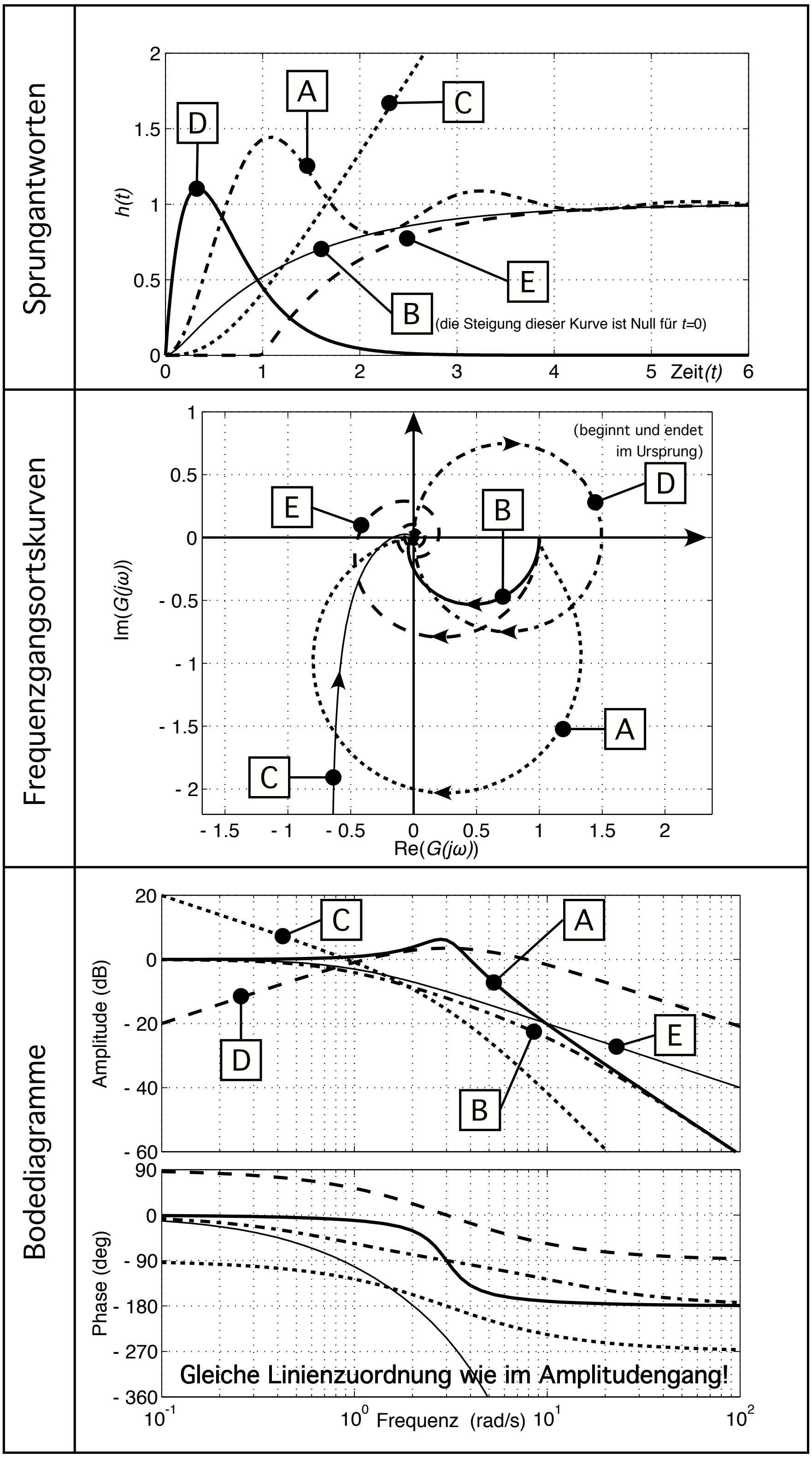
Betragsmäßiges Sortieren der Pole und Nullstellen von klein nach groß:
Pol $p_1 = -0.5$, Pol $p_2 = -1$, Pol $p_3 = -2$

Verstärkung, bzw $A(\omega \to 0)$ ist ein endlicher Wert $\neq 0$
$\Rightarrow$ Globales P-Verhalten (aus G kann kein s^k ausgeklammert werden)
$\Rightarrow$ Amplitudengang beginnt mit Steigung 0 bei Verstärkung K, Phase 0°

$p_1 \to w_e = 0.5$	einfacher Pol	Steigung nimmt ab um 20 dB/Dek	Phase nimmt um 90° ab
$p_2 \to w_e = 1$	"	"	"
$p_3 \to w_e = 2$	"	"	"

HÜ7 Dynamische Systeme

Aufgabe HÜ7.1 Dynamische Systeme



Die nachfolgenden Begründungen sind als Beispiele zu verstehen. Andere Begründungen sind ebenfalls möglich.

Begründungen:

A) $\frac{9}{s^2+1{,}5s+9}$:
$\omega_0^2 = 9$, $2D\omega_0 = 1{,}5 \Rightarrow D = 0{,}25 < 1$: Schwach gedämpftes schwingungsfähiges System 2. Ordnung. Schwingungen in Sprungantwort, Resonanzüberhöhung Amplitudengang, Ortskurve von 0 bis -180° mit Zeigerlängen >1.

B) $\frac{9}{s^2+12s+9}$:
$\omega_0^2 = 9$, $2D\omega_0 = 12 \Rightarrow D = 2 > 1$: Nicht schwingungsfähiges System 2. Ordnung. Schwingungsfreier Anstieg von 0 bei $T = 0$ auf den asymptotischen Endwert 1. Amplitudengang von 0dB/Dek. auf -40dB/Dek. ohne Resonanzüberhöhung. Ortskurve von 0 bis -180° mit kleinerer Zeigerlänge als A.

C) $\frac{9}{s(s^2+6s+9)}$:
System mit I-Verhalten (Faktor s im Nenner). Sprungantwort strebt für $t \to \infty$ gegen ∞. Amplitudengang beginnt mit negativer Steigung (-20dB/Dek.), bzw. negativer Phase (-90°). Ortskurve beginnt im Unendlichen mit -90° und endet im Ursprung mit -270°.

D) $\frac{9s}{s^2+6s+9}$:
System mit D-Verhalten (Faktor s im Zähler). Sprungantwort klingt für $t \to \infty$ auf Null ab. Amplitudengang beginnt mit positiver Steigung (20dB/Dek.), bzw. positiver Phase (+90°). Ortskurve beginnt im Usprung mit +90° und endet im Ursprung mit -90°.

E) $\frac{1}{s+1} \cdot e^{-s}$:
System erster Ordnung mit einer Totzeit von 1 sec. Sprungantwort beginnt erst bei $t = 1$. Phasengang strebt für $t \to \infty$ gegen ∞. Ortskurve zeigt aufgrund der der starken Phasenverschiebung den typischen spiralförmigen Verlauf.

HÜ8 Stabilität linearer Systeme

Aufgabe HÜ8.1 Stabilität von Übertragungsfunktionen

a)

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 7}$$

Seite Skript Seite 216
Hurwitz-Kriterium (für $n = 2$ genügt die erste Bedingung):

$c_i > 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$

Nennerpolynom: $c_2\, s^2 + c_1\, s + c_0$

$$1\, s^2 + 0\, s + 7$$
$$\Lsh c_1 = 0 \quad \text{nicht stabil!}$$

Alternativ Berechnung der Pole:

$$s^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow s = \pm\sqrt{-7} = \pm\sqrt{7} \cdot \sqrt{(-1)} \Rightarrow = \pm 7i$$

Konjugiert komplexes Polpaar, Realteil gleich Null $\Rightarrow$ ungedämpfte Dauersschwingung (grenzstabil).

b)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4\, s + 3} \quad \text{(2. Ordnung)}$$

Hurwitz-Kriterium (für $n = 2$ genügt die erste Bedingung):

$$\underbrace{1}_{c_2}\, s^2 + \underbrace{4}_{c_1}\, s + \underbrace{3}_{c_0} \quad \Rightarrow \text{ alle } c_i > 0$$

Bedingung erfüllt $\Rightarrow$ System stabil.

Alternativ Pole berechnen:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{4 - 3} && \text{(pq-Formel)} \\ p_1 &= -2 + 1 = -1 && \Rightarrow \text{ stabil} \\ p_2 &= -2 - 1 = -3 && \Rightarrow \text{ stabil} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)\,(s+3)}$$

c)

$$G(s) = \frac{1}{s^3 - 6\, s^2 + 3\, s + 10}$$

Hurwitz-Kriterium:

1.) $\underbrace{1}_{c_3} s^3 + \underbrace{-6}_{c_2} s^2 + \underbrace{3}_{c_1} s + \underbrace{10}_{c_0} \quad \Rightarrow c_2 = -6 < 0$ nicht erfüllt!

2.) Da 1.) bereits nicht erfüllt ist müssen keine weiteren Bedingungen geprüft werden.

Sytem instabil!

d)

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 2\,s^2 + 4\,s + 10}$$

Hurwitz-Kriterium:
1.)

$$\underbrace{1}_{c_3} s^3 + \underbrace{2}_{c_2} s^2 + \underbrace{4}_{c_1} s + \underbrace{10}_{c_0} \quad \Rightarrow \text{ alle } c_i > 0 \text{ erfüllt!}$$

2.) Wenn 1.) erfüllt, für $n > 2$ zusätzlich alle Determinanten von D_2 bis D_{n-1} prüfen:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{pmatrix} = c_1\,c_2 - c_3\,c_0 > 0$$
$$= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 10 = -2 < 0 \,\text{instabil}$$

Numerisch ermittelt: $s_1 \approx -2{,}11$ und $s_{2,3} = 0{,}11 \pm 2,12i$ ($Re(s_{2,3}) > 0 \Rightarrow$ instabil).

Das Hurwitz-Kriterium ist vorteilhaft, wenn die analytische Berechnung der Pole aufwändig ($n = 3$, $n = 4$) oder unmöglich ($n > 4$) ist. Bei numerischer Berechnung können keine unbekannten Variablen (z.B. Reglerparameter) im Polynom stehen.

Aufgabe HÜ8.2 Stabilität eines Regelkreises mit 2 Reglerparametern

a) Der Regler ist ein **PD-Regler**. Die Strecke hat Pole in der rechten Halbebene (+1,+2) und ist daher **instabil**. Darüber hinaus liegt eine Nullstelle in der rechten Halbebene (+0,25), d.h. das System hat einen Allpassanteil und ist **nicht minimalphasig**.

b) Berechnung der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises:

$$1 + G_0(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + G_R(s)G_S(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{2K_R(s - \frac{1}{4})(1 + T_v s)}{(s-2)(s-1)} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 + 2K_R T_v)}_{c_2} s^2 + \underbrace{(2K_R - 3 - \frac{1}{2}K_R T_v)}_{c_1} s + \underbrace{2 - \frac{1}{2}K_R}_{c_0} = 0$$

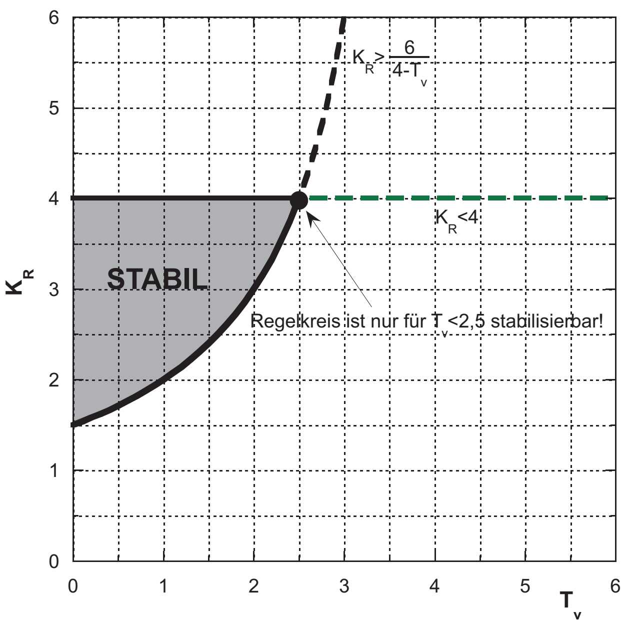
Für Polynome 2. Grades muss für Stabilität nach dem Hurwitz-Kriterium nur die Bedingung $c_i > 0$ erfüllt sein:

$$c_2 > 0 : \; 1 + 2K_R T_v > 0 \Leftrightarrow K_R > -\frac{1}{2T_v} \text{ für } T_v > 0, \text{ Bed. entfällt, da } K_R > 0.$$

$$c_1 > 0 : \; \frac{1}{2} \cdot K_R(4 - T_v) > 3 \Leftrightarrow \boxed{K_R > \frac{6}{4 - T_v}} \text{ für } T_v < 4$$

Die Bedingung für $T_v > 4$ $\left(K_R < \frac{6}{4-T_v}\right)$ entfällt, da $K_R > 0$ angenommen wurde.

$$c_0 > 0 : \; 2 - \frac{1}{2}K_R > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_R < 4}$$



c) Das System ist stabilisierbar, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

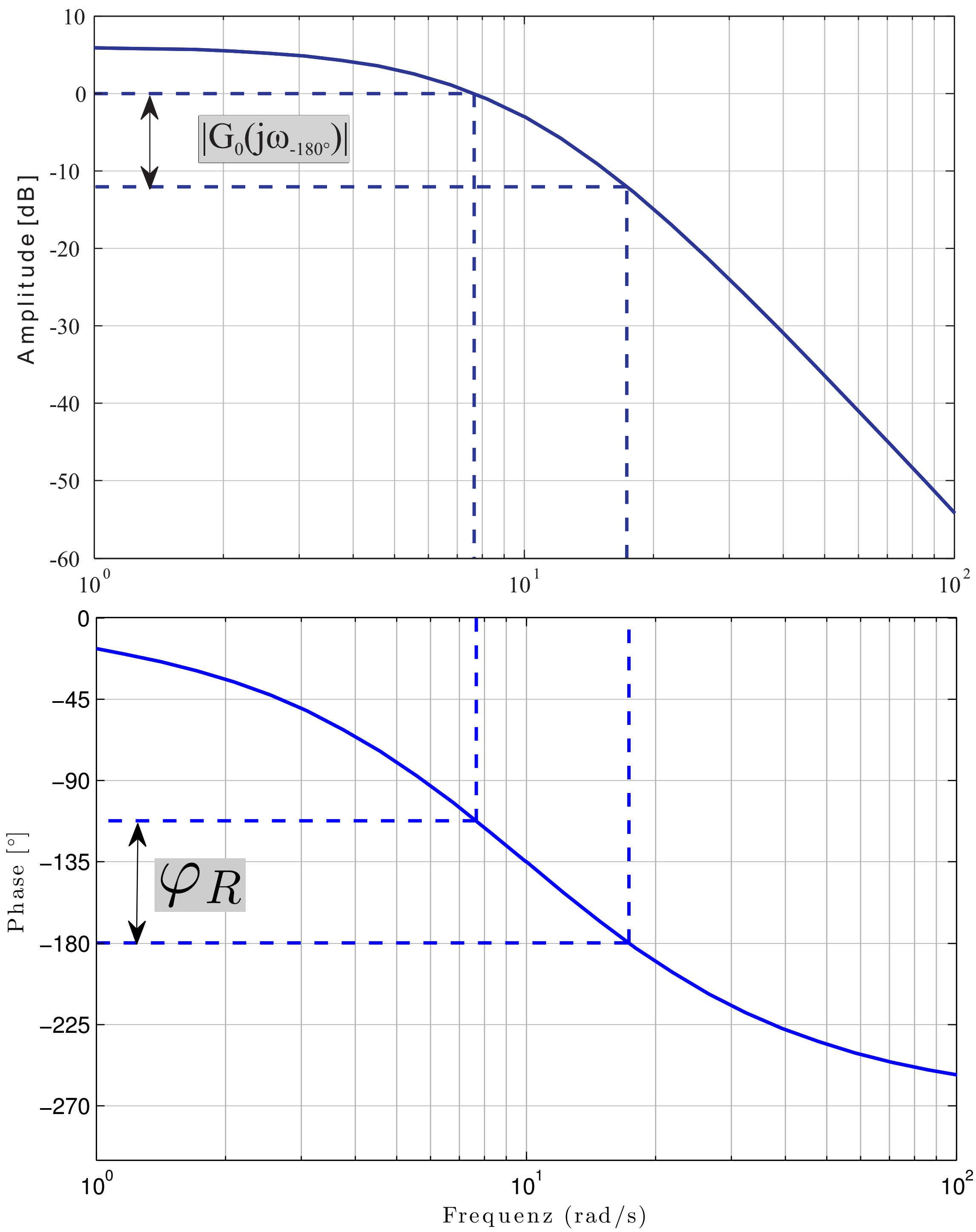
$$K_R = 4 > \frac{6}{4 - T_v} \Leftrightarrow \boxed{T_v < 2{,}5}$$

Bei $T_v = 2{,}5$ ist der geschlossene Regelkreis für $K_R = 4$ an der Stabilitätsgrenze, für alle anderen K_R ist er instabil.

HÜ9 Qualitative Stabilitätskriterien

Aufgabe HÜ9.1 Amplituden- und Phasengang

a) Lesen Sie aus dem Diagramm den Amplituden- und Phasenrand ab.



Aus den Diagrammen ist abzulesen:

- Amplitudenrand:

$$k_R = \frac{1}{|G_0(j\omega_{-180^\circ})|} \approx \frac{1}{-12 \text{ dB}} \approx \frac{1}{0{,}25} \approx 4$$

- Phasenrand:

$$\varphi_R = 180^\circ - |-112| = 68^\circ$$

b) Erläutern sie **kurz** was der Amplituden- und Phasenrand aussagt.

Der Amplitudenrand gibt den Faktor an, um den die Kreisverstärkung erhöht werden kann, bis die Stabilitätsgrenze erreicht wird.

Der Phasenrand gibt den Winkel an, um den die Phasenverschiebung erhöht werden kann, bis die Stabilitätsgrenze erreicht wird.

Da der Amplitudenrand > 1 und der Phasenrand > 0 ist, ist der geschlossene Regelkreis mit $G_R = 2$ stabil.

Das reale System besteht aus einem P-Regler und einer totzeitbehafteten Strecke:

$$G_R(s) = K \qquad \text{mit } K > 0$$

$$G_S(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{10} \cdot s\right)^3} \cdot e^{-T_t s} \qquad \text{mit } T_t > 0$$

c) Berechnen sie den Amplituden- und Phasengang des realen Systems.

$$G_0(s) = K \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{10} \cdot s\right)^3} \cdot e^{-T_t s}$$

$$G_0(j\omega) = K \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{10} \cdot j\omega\right)^3} \cdot e^{-T_t j\omega}$$

Amplitudengang

$$\begin{aligned} A(G_0) &= |G_0(j\omega)| \\ &= |K| \cdot \left| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{10} \cdot j\omega\right)^3} \right| \cdot \left| e^{-T_t j\omega} \right| \\ &= K \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{100} \cdot \omega^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Phasengang

$$\begin{aligned}
\varphi(G_0) &= \arg(G_0(j\omega)) \\
&= \arg(K) + \arg\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{10}\cdot j\omega\right)^3}\right) + \arg\left(e^{-T_t\, j\omega}\right) \\
&= \arg(K) - 3\cdot\arg\left(1+\frac{1}{10}\cdot j\omega\right) + \arg\left(e^{-T_t\, j\omega}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{0}{K}\right) - 3\cdot\arctan\left(\frac{\frac{1}{10}\cdot\omega}{1}\right) - T_t\,\omega \\
&= -3\cdot\arctan\left(\frac{1}{10}\cdot\omega\right) - T_t\,\omega
\end{aligned}$$

d) Ist das System bei einer Reglerverstärkung $K = 2$ und einer Totzeit $T_t = 0{,}2$ stabil? Betrachten sie dazu den Phasenrand.

Für den Phasenrand gilt $\varphi_R = 180° - |\varphi(\omega_D)|$, d.h zunächst wird die Durchtrittsfrequenz ω_D benötigt. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
|G(j\,\omega_D)| &= 1 \\
K\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{100}\cdot\omega_D^2\right)^{\frac{3}{2}}} &= 1 \\
K &= \left(1+\frac{1}{100}\cdot\omega_d^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
100\cdot\left(K^{\frac{2}{3}}-1\right) &= \omega_D^2 \\
\omega_D &= 10\cdot\sqrt{K^{\frac{2}{3}}-1}
\end{aligned}$$

Für $K = 2$ ist $\omega_D \approx 7{,}66$. Damit ist der Phasenrand

$$\begin{aligned}
\varphi_R &= 180° - |\varphi(\omega_D)| \\
&= 180° - \left|-3\cdot\arctan\left(\frac{1}{10}\cdot\omega_D\right) - T_t\,\omega_D\right| \\
&\approx \pi - |-1{,}96 - 1{,}53| \\
&\approx -0{,}35 \mathrel{\hat{\approx}} -20°
\end{aligned}$$

Der Phasenrand ist negativ, dass System ist also für das gewählte K bei einer Totzeit mit $T_t = 0{,}2$ nicht stabil.

HÜ10 Einfache lineare Regler

Aufgabe HÜ10.1 Regelung einer Strecke mit globalem I-Verhalten (statische Anforderungen)

$G_R = K_p$ (P-Regler)
$E = S \cdot W$

a)

$$E = \frac{1}{1 + G_R G_S} \cdot W \;\Rightarrow\; E = \frac{1}{1 + \frac{K_P \cdot 2}{s\,(s+2)}} \cdot \frac{1}{s} \tag{1}$$

$$E = \frac{s\,(s+2)}{s\,(s+2) + 2\,K_P} \cdot \frac{1}{s} \tag{2}$$

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{s\,(s+2)}{s\,(s+2) + 2\,K_P} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{0}{2\,K_P} = 0 \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Für Störungen D am Ausgang der Regelstrecke gilt (bis auf das Vorzeichen) die gleiche Gleichung für $E = -S \cdot D \;\Rightarrow\; e(t \to \infty) = 0$

b)

$$E = -\frac{G_S}{1 + G_R G_S} \cdot D_i$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{\frac{2}{s\,(s+2)}}{1 + \frac{2\,K_P}{s\,(s+2)}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$E = -\frac{2}{s\,(s+2) + 2\,K_P} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot E$$

$$\Rightarrow \quad e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \left(-\frac{2}{s\,(s+2) + 2\,K_P} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right) = -\frac{2}{0 + 2\,K_P}$$

$$\Rightarrow \quad e(t \to \infty) = -\frac{1}{K_P} \neq 0$$

c)

Rampe als Führungsgröße : $W = \frac{1}{s^2}$

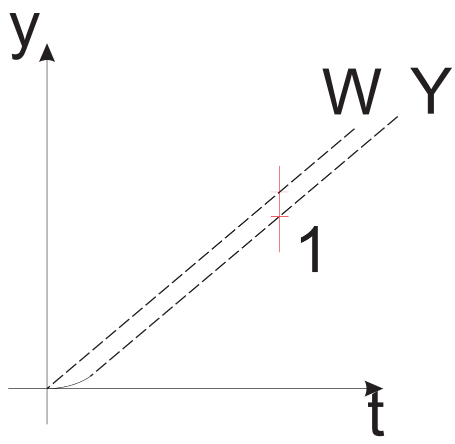
- P-Regler:

$$E = \underbrace{\frac{s\,(s+2)}{s\,(s+2) + 2\,K_P}}_{\text{aus a)}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{\cancel{s}\,(s+2)}{s\,(s+2) + 2\,K_P} \frac{1}{\cancel{s^2}}$$

$$e(t \to \infty) = \frac{2}{2\,K_P} = \frac{1}{K_P} \neq 0$$

Schlepp- /Geschwindigkeitsfehler bei Verwendung des P-Reglers:



- PI-Regler:

$$G_R = K_P \left(\frac{T_n\, s + 1}{T_n\, s} \right)$$

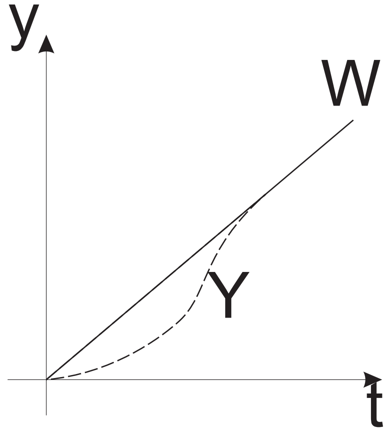
$$\Rightarrow \quad S \cdot W =$$

$$E = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{2\, K_P\, (T_n\, s + 1)}{s\,(s+2) \cdot T_n\, s}}_{G_R\, G_S}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{T_n\, s^2\, (s+2)}{T_n\, s^2\, (s+2) + 2\, K_P (T_n\, s + 1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \, \frac{T_n\, \cancel{s^2}\, (s+2)}{T_n\, s^2\, (s+2) + 2\, K_P (T_n\, s + 1)} \cdot \frac{\cancel{1}}{\cancel{s^2}}$$

$$= \frac{0 \cdot T_n\, (0+2)}{0 + 2\, K_P} = \frac{0}{2\, K_P} = 0$$



Inneres Modell Prinzip:
Soll eine Regelung einer bestimmten Fühungsgröße (für $t \to \infty$) exakt folgen

können, so muss dieses Signal als Modell in der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises enthalten sein! Zum Beispiel:

Sprung: $\frac{1}{s}$ (Regler oder Strecke mit I-Anteil)

Rampe: $\frac{1}{s^2}$ (2 I-Anteile, z.B. in Regler und Strecke jeweils einer)

HÜ12 Kompensationsregler

a) Übertragungsfunktion der Strecke:

$$y(t) + 3\,\dot{y}(t) = 3\,u(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned} Y(s) + 3\,s\,Y(s) &= 3\,U(s) \\ (1+3\,s)\cdot Y(s) &= 3\,U(s) \\ G_S = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{3}{1+3\,s} \end{aligned}$$

b) Gewünschtes Verhalten des geschlossenen Regelkreises:

1) PT_1-Verhalten mit unbekannter Verstärkung und Zeitkonstante, also allgemein

$$G_W(s) = \frac{K_W}{1+T_W\cdot s}.$$

2) Es soll keine bleibende Regelabweichung verbleiben, es wird also gefordert, das die Sprungantwort für $t\to\infty$ gleich eins sein muss:

$$\lim_{t\to\infty} G_W(t) * \sigma(t) \overset{!}{=} 1$$

Um keine komplizierte Faltung berechnen zu müssen, die Berechnung im Bildbereich:

$$\lim_{t\to\infty} G_W(t) * \sigma(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot G_W(s)\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{K_W}{1+T_W\cdot s} = K_W \overset{!}{=} 1$$

3) Für ein PT_1-System ist bekannt (vgl. Kapitel 7), dass dieses in einer Zeit t, die dem dreifachen ihrer Zeitkonstante T entspricht, auf auf etwa 95% ihres Wertes einschwingt, also $t = 3\,T$. Gefordert ist eine Einschwingzeit von sechs Sekunden:

$$t = 3\,T_W \quad\Leftrightarrow\quad 6 = 3\cdot T_W \quad\Leftrightarrow\quad T_W = 2$$

Die gewünschte Gesamtübertragungsfunktion muss also lauten:

$$G_W(s) = \frac{1}{1+2\cdot s}.$$

c) Ein Kompensationsregler hat allgemein die Form

$$G_R(s) = \frac{G_W(s)}{G_S(s)\cdot(1-G_W(s))}$$

Hier also:

$$G_R(s) = \frac{\frac{1}{1+2\cdot s}}{\left(\frac{3}{1+3\,s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+2\cdot s}\right)} = \frac{1\cdot(1+3\,s)}{3\cdot(1+2\cdot s)\cdot\left(\frac{1+2\,s-1}{1+2\cdot s}\right)} = \frac{1+3\,s}{6\,s} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6\,s}$$

d) Ein Regler ist dann realisierbar wenn Zählergrad $\leq$ Nennergrad. Da hier Zählergrad $=$ Nennergrad, ist der Regler realisierbar.

e)

$$G_R(s) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{P-Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{6\,s}}_{\text{I-Anteil}}$$

HÜ13 Qualitative Stabilitätskriterien

Aufgabe HÜ13.1 Konstruktion der Wurzelortskurve

$$G_0(s) = \frac{(s+0.5)\,(s+1)}{(s+0.5)\,(s+2)\,(s^2+2\,s+2)}$$

a)

$$\begin{aligned} m &= 2 \quad \text{Nullstellen} & \text{bei} \quad n_1 &= -0.5 \\ & & n_2 &= -1 \\ n &= 4 \quad \text{Pole} & \text{bei} \quad p_1 &= -0.5 \\ & & p_2 &= -2 \\ & & p_{3,4} &= -1 \pm j \end{aligned}$$

Äste der WOK, die im Unendlichen enden:

$$n - m = 4 - 2 = 2$$

Schnittpunkt S_A der Asymptoten mit der reellen Achse:

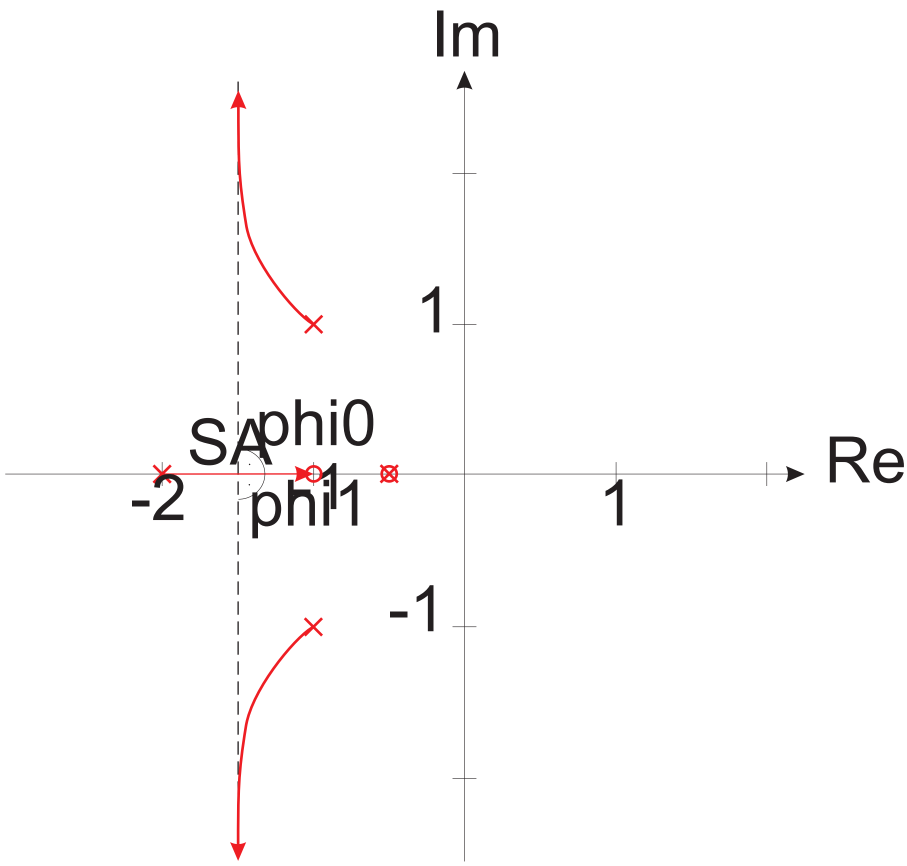
$$\begin{aligned} S_A &= \frac{1}{2}\,(-0.5 - 2 - 1 \cancel{+j} - 1 \cancel{-j} - (-0.5 - 1)) \\ &= \frac{1}{2}(-3) = -1.5 \end{aligned}$$

Asymptotenwinkel, die ins Unendliche gehen:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (1 + 2 \cdot 0)\,\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \\ \psi_1 &= (1 + 2 \cdot 1)\,\frac{180^\circ}{2} = 270^\circ = -90^\circ \end{aligned}$$

Als nächster Schritt wird geprüft, ob die WOK Äste besitzt, die auf der reellen Achse verlaufen.

siehe Skript:
Jeder Punkt der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Anzahl der reellen Pole und Nullstellen (zusammen gezählt) ungerade ist, gehört zur WOK.



b) Da die Wok die imaginäre Achse nicht schneidet, ist das System für alle K stabil.

Aufgabe HÜ13.2 Wurzelortskurve

a) WOK für veränderliche Reglerverstärkung K_P:

- offener Regelkreis: $G_0(s) = \dfrac{K_P}{s(s+1)(s+2)}$
- Pole / Nullstellen $(m = 0,\ n = 3)$:

$$p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_3 = -2$$

- Anzahl der Äste, die im Unendlichen enden:

$n - m = \underline{3}$ Äste der WOK enden für $K_P \to \infty$ im Unendlichen

- Schnittpunkt s_A der Asymptoten mit der reellen Achse:

$$s_A = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{i=1}^{m} n_i}{n-m} = \frac{1}{3}(0-1-2) = \underline{-1}$$

- Asymptotenwinkel Ψ_l:

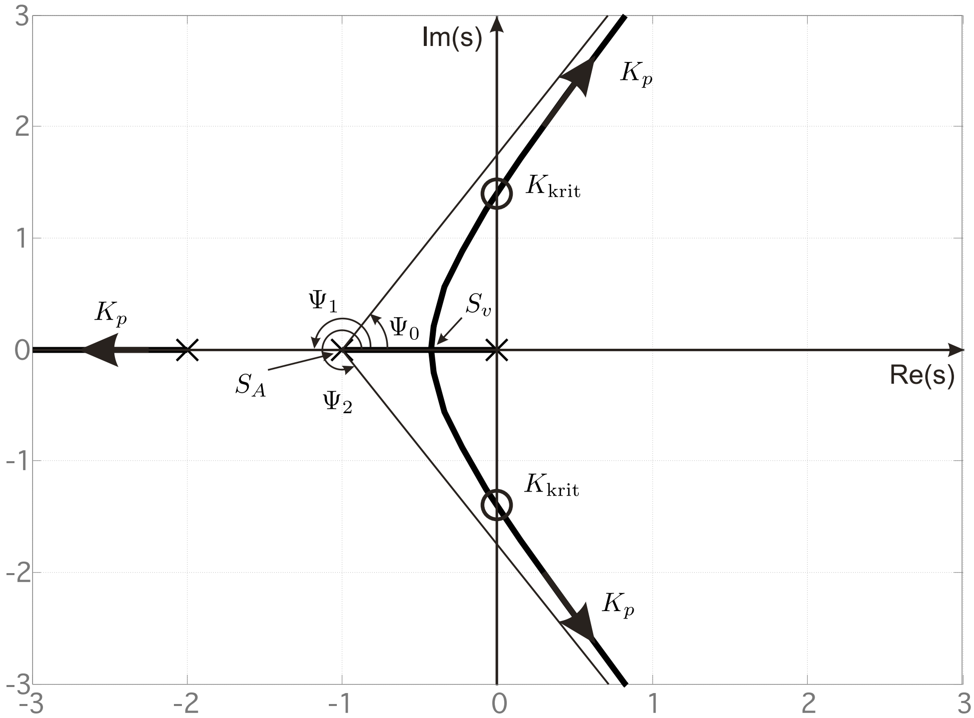
$$\Psi_l = (1 + 2 \cdot l) \cdot \frac{180°}{n-m} \qquad \underline{\text{mit:}}\ l = 0, 1, \ldots, n-m-1$$

$$\Psi_0 = (1 + 2 \cdot 0) \cdot \frac{180°}{3} = \underline{60°}$$

$$\Psi_1 = (1 + 2 \cdot 1) \cdot \frac{180°}{3} = \underline{180°}$$

$$\Psi_2 = (1 + 2 \cdot 2) \cdot \frac{180°}{3} = \underline{300°}$$

- Verzweigungspunkt s_V auf der reellen Achse:
  Da der Bereich auf der reellen Achse zwischen dem Pol bei -1 und bei 0 Teil der WOK ist, muss zwischen den beiden Polen ein Verzweigungspunkt liegen, damit die Äste im Unendlichen enden können.
- Skizze der WOK:



b) Bei Variation der Reglerverstärkung K_P von $0 \to \infty$ beginnt man in den Polen der WOK und läuft entlang der Äste. Im Schnittpunkt der WOK-Äste mit der imaginären Achse liegt eine kritische Verstärkung K_{krit} vor, da sich in diesem Punkt der Regelkreis mittels eines P-Regler grenzstabil betreiben lässt. Bei Überschreitung dieses Punktes, d.h. bei weiterer Erhöhung der Reglerverstärkung K_P, lägen die Pole des geschlossenen Regelkreises in der rechten Hälfte der s-Ebene. Der Regelkreis lässt sich dann nicht mehr mittles eines P-Reglers stabil betreiben.

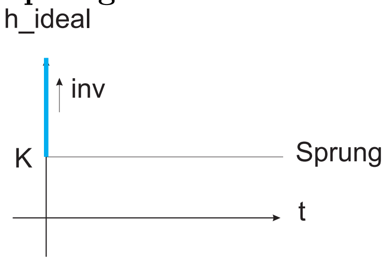
HÜ15 Vertiefungen und Erweiterungen der Standartregelkreises

Aufgabe HÜ15.2 Näherungsweise Realisierung von Übertragungsgliedern

$G_{ideal}(s) = K\,(1 + T\,s)$ (ideales PD-Glied)

a) Berechnen und skizzieren Sie die Sprung- und Rampenantwort des Systems. Warum ist dieses System nicht realisierbar?

Sprungantwort:



$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot K\,(1 + T\,s) = \frac{K}{s} + T\,K\,(\cdot 1)$$

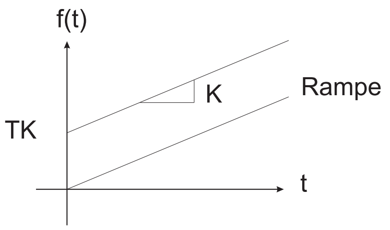
$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$h(t) = K \cdot \sigma(t) + K\,T\,\delta(t) \quad (\delta(t) : \text{Dirac-Impuls})$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ K + K\,T\,\delta(t) & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

Der Dirac-Impuls ist nicht realisierbar! Dieses Problem tritt immer auf wenn die Zählerordnung von $G(s) >$ als die Nennerordnung von $G(s)$ ist.

Rampenantwort:



$$F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot K\,(1 + T\,s) = \frac{K}{s^2} + \frac{T\,K}{s}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$f(t) = (\underbrace{K\,t}_{\text{Steigung}} + \underbrace{T\,K}_{\text{Offset}})$$

In der Realität gibt es keine Systeme die eine exakte Ableitung des Eingangssignals durchführen. ideale $\Leftrightarrow$ reale (Masse, Feder)

b) Durch hinzufügen eines Verzögerungsglieds mit der Zeitkonstante T_1 wird das System realisierbar:

$$G_{real}(s) = \frac{K\,(1+T\,s)}{1+T_1\,s}$$

Berechnen sie Anfangs- und Endwert der Sprungantwort. Was passier, wenn T_1 verkleinert ($T_1 \to 0$) wird?

Endwert der Sprungantwort, $h(t \to \infty)$:

$$\lim_{s\to 0} G_{ideal}(s) = K\,(1+T\cdot 0) = K$$

$$\lim_{s\to 0} G_{real}(s) = \frac{K\,(1+T\cdot 0)}{1+T_1\cdot 0} = K$$

Anfangswert der Sprungantwort $h(t \to 0)$:

$$\lim_{s\to\infty} G_{ideal}(s) = K\,(1+T\cdot\infty) = \infty$$

$$\lim_{s\to\infty} G_{real}(s) = \frac{K\,(1+T\cdot\infty)}{1+T_1\cdot\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{K\,(\frac{1}{s}+T)}{\frac{1}{s}+T_1} = \frac{K\,T}{T_1}$$

aus

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} G_{real}(s) = \frac{K\,T}{T_1}}$$

sieht man: falls $T_1 \to 0$ dann $h(0) \to \infty$. T_1 Kann nicht beliebig klein gewählt werden. T_1 ist begrenzt durch die maximale Signalgröße (z.B. Stellgröße), die erzeugt werden kann.

c) Berechnen Sie den genauen Zeitverlauf der Sprungantwort des realisierbaren Gliedes durch inverse Laplace-Transformation. Skizzieren Sie den Verlauf für $K = T = 1$ und verschiedene $T_1 = 0.5,\ 0.2,\ 2$

Verlauf von $h_{real}(t)$ im Zeitbereich:

$$H_{real}(s) = G_{real}(s)\cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{Sprung} = K\left(\frac{1}{s\,(1+T_1\,s)} + T\,\frac{\cancel{s}}{\cancel{s}\,(1+T_1\,s)}\right)$$

$$H_{real}(s) = K\left(\frac{1}{T_1}\cdot\underbrace{\frac{1}{s\,(s+\frac{1}{T_1})}}_{I} + \frac{T}{T_1}\cdot\underbrace{\frac{1}{s+\frac{1}{T_1}}}_{II}\right)$$

Durch T_1 teilen, um auf Standardform der Korrespondenztabelle zu kommen.

I) Korrespondenz:

$$\frac{1}{a}\left(1-e^{-a\,t}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s\,(s+a)}$$

hier:

$$a=\frac{1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1\left(1-e^{-\frac{1}{T_1}\,t}\right)$$

II) Korrespondenz:

$$e^{-a\,t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s+a}$$

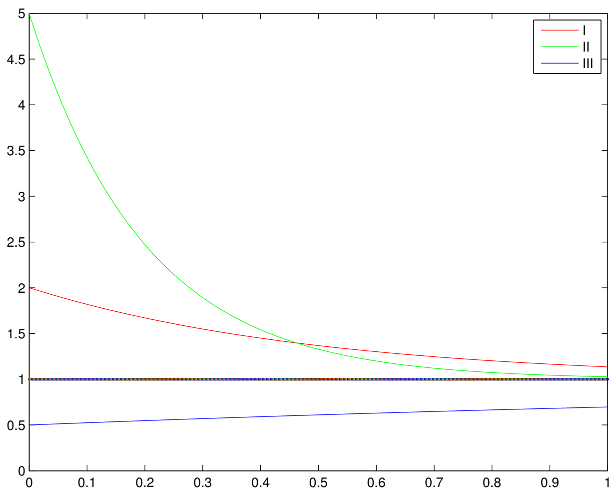
hier:

$$a=\frac{1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{1}{T_1}\,t}$$

$$\Rightarrow \quad h_{real}(t)=K\left(\frac{1}{\cancel{T_1}}\cdot\underbrace{\cancel{T_1}\left(1-e^{-\frac{1}{T_1}\,t}\right)}_{I}+\frac{T}{T_1}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{T_1}\,t}}_{II}\right)$$

$$\boxed{h_{real}(t)=K\left(1+\left(\frac{T}{T_1}-1\right)\cdot e^{-\frac{1}{T_1}\,t}\right)}$$

$$h_{real}(t)=\begin{cases} K & \text{für } t\to\infty \text{, da } e^{-\frac{1}{T}\,t} \text{ gegen 0 geht.}\\ K\left(1+\left(\frac{T}{T_1}-1\right)\cdot 1\right)=\frac{K\,T}{T_1} & \text{für } t\to 0 \text{, da } e^0=1\end{cases}$$



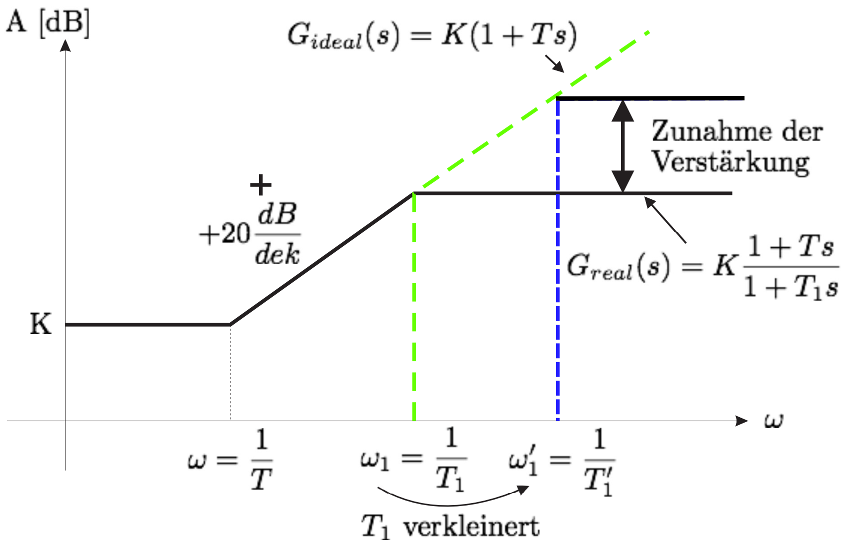
I) $T_1=0,5;\ h(t=0)|_{T_1=0,5}=2$

II) $T_1=0,2;\ h(t=0)|_{T_1=0,2}=5$

III) $T_1=2;\ h(t=0)|_{T_1=2}=\frac{1}{2}$

d) Skizzieren sie für beide Systeme den asymptotischen Amplitudengang. Warum ist insbesondee der Frequenzgang des idealen PD-Gliedes problematisch, wenn hochfrequentes Messrauschen vorliegt?

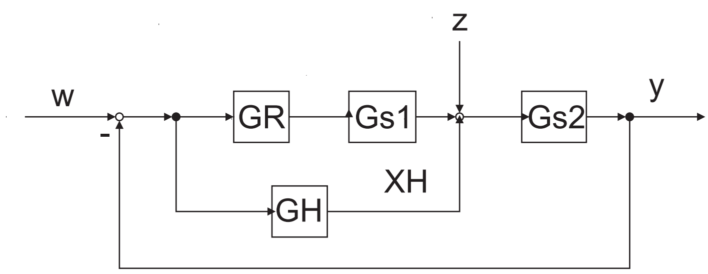
Amplitudengang (Bodediagramm):



- idelaes PD-Glied: $A \to \infty$ bei zunehmender Frequenz! $\Rightarrow$ sehr hohe Verstärkung von hochfrequenten Rauschsignalen
- reales PD-Glied: Problem ist etwas entschärft, da die Amplitude A für $w \to \infty$ auf einen endlichen (evtl. aber hohen) Wert begrenzt sind.

Aufgabe HÜ15.3 Hilfsstell- und Hilfsregelgrößen

a) Hilfsstellgröße:



$$Y(s) = [(W - Y)\, G_R\, G_{S1} + (w - y)\, G_H + Z]\; G_{S2}$$

Ausmultiplizieren:

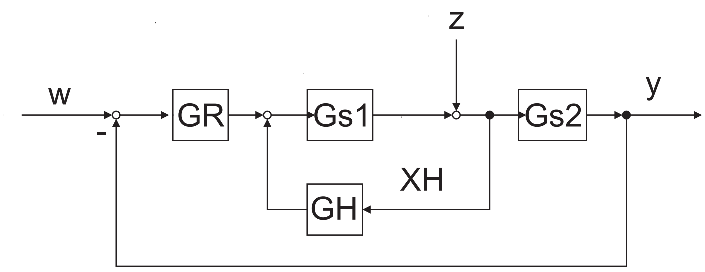
$$Y = (W\, G_R\, G_{S1} + W\, G_H)\, G_{S2} - Y\,(G_R\, G_{S1} + G_H)\, G_{S2} + G_{S2} \cdot Z$$

Ausklammern

$$(1 + ((G_R\, G_{S1} + G_H)\ G_{S2})\ Y = (G_R\, G_{S1} + G_H)\ G_{S2} \cdot W + G_{S2} \cdot Z$$

$$\boxed{Y(s) = \underbrace{\frac{(G_R\, G_{S1} + G_H)\, G_{S2}}{1 + (G_R\, G_{S1} + G_H)\, G_{S2}}}_{G_W(s)} \cdot W(s) + \underbrace{\frac{G_{S2}}{1 + (G_R\, G_{S1} + G_H)\, G_{S2}}}_{G_Z(s)} \cdot Z(s)}$$

Hilfsregelgröße:



$$Y(s) = [[(W - Y)\, G_R - G_H \cdot X_H]\ G_{S1} + Z]\ G_{S2}$$

$$\text{mit:} \quad X_H \cdot G_{S2} = Y \quad \Leftrightarrow \quad X_H = G_{S2}^{-1} \cdot Y$$

X_H einsetzen und ausmultiplizieren

$$Y(s) = G_R\, G_{S1}\, G_{S2}\, W(s) - G_R\, G_{S1}\, G_{S2}\, Y(s) - G_H\, G_{S1}\, \cancel{G_{S2}}\, \cancel{G_{S2}^{-1}}\, Y(s) + G_{S2}\, Z(s)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y(s) = \underbrace{\frac{G_R\, G_{S1}\, G_{S2}}{1 + (G_R\, G_{S2} + G_H)\, G_{S1}}}_{G_W(s)} \cdot W(s) + \underbrace{\frac{G_{S2}}{1 + (G_R\, G_{S2} + G_H)\, G_{S1}}}_{G_Z(s)} \cdot Z(s)}$$

b) Vorteile allgemein: Schaffen zusätzlicher Freiheitsgrade für den Reglerentwurf

Vorteile anschaulich:
Hilfsstellgröße: Umgehung des (langsamen) Streckenteils $G_{S1}(s)$ führt zu schnellerem Stellzugriff
Hilfsregelgröße: Schnelleres Erfassen und Ausregeln der Störung durch Messung vor dem (langsameren) Streckenteil $G_{S2}(s)$

Nachteile: Zusätzliches Mess-/Stellglied nötig. (Nicht bei allen Strecken Möglich, zusätzliche Kosten)

c) Standartregelkreis ohne Störung:

$$G_w = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{Z_0}{N_0 + Z_0}$$

mit G_0 gleich $\frac{Z_0}{N_0}$

$$G_0 = G_R\, G_{S1}\, G_{S2} = \frac{K_p}{4\,s\,(1+2\,s)}$$

$$G_W = \frac{K_p}{8\,s^2 + 4\,s + K_p} = \frac{\frac{K_p}{8}}{s^2 + 0,5\,s + \frac{K_p}{8}}$$

Koeffizientenvergleich für Nennerpolynom:

$$s^2 + 2\,D\,\omega_0\,s + \omega_0^2 = s^2 + 0,5\,s + \frac{K_p}{8}$$

es folgt

$$2\,D\,\omega_0 = 0,5 \quad (1)$$

$$w_0^2 = \frac{K_p}{8} \quad (2)$$

gesucht K_p für $D = 1$:

mit (1):

$$2 \cdot 1\,\omega_0 = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{4}}$$

mit (2):

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{K_p}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_p = 0,5}$$

d) $\omega_0 = \frac{1}{4}$ ergab sich bereits unter c)
Regelung schneller machen:
aus (2): $K_p = 8\,\omega_0^2$. Wenn ω_0 erhöht werden soll muss K_p vergrößert werden! ($\omega_0^2 \sim K_p$)

Was passiert mit der Dämpfung?
aus (1): $D = \frac{0,5}{2\,\omega_0} = \frac{1}{4\,\omega_0} \quad \Rightarrow \quad D \sim \frac{1}{\omega_0}$ (bez. $D \sim \frac{1}{\sqrt{K_p}}$)

Eine schnellere Regelung bewirkt eine kleinere Dämpfung (stärkere Schwingungen). Das ist unerwünscht!

e) Gleichung aus a) ($G_W(s)$ für Hilfsstellgröße)

$$G_W(s) = \frac{1}{8} \cdot \frac{K_P + K_H\,(1+2\,s)}{s^2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,K_H)\,s + \frac{1}{8}(K_H + K_P)}$$

Koeffizientenvergleich für Nennerpolynom:

$$s^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,K_H\right)\,s + \frac{1}{8}\,(K_H + K_P) = s^2 + 2\,D\,\omega_0\,s + \omega_0^2$$

$D \overset{!}{=} 1$ und $\omega_0 \overset{!}{=} 5$ gefordert:

$$2\,D\,\omega_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,K_H$$

mit $D = 1$:

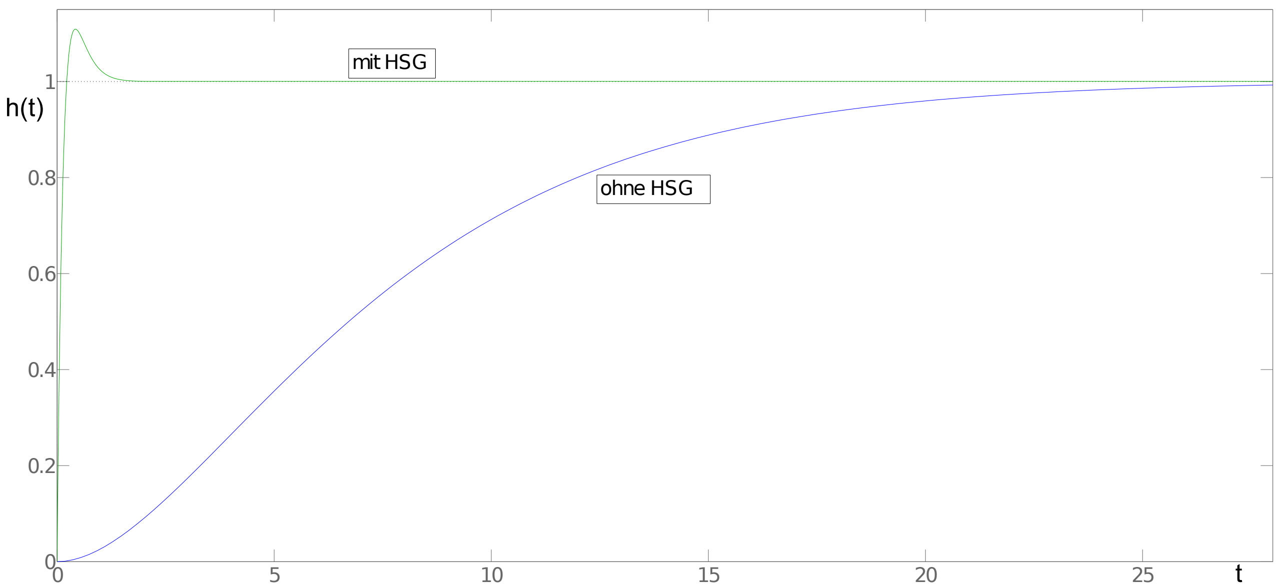
und $\omega_0 = 5$: $\boxed{K_H = 38}$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{8}\,(K_H + K_P)$$

mit $\omega_0 = 5$ und $K_H = 38$ $\boxed{K_P = 162}$

Dadurch, das 2 wählbare Reglerparameter vorliegen, können die 2 Größen D und ω_0 beliebig vorgegeben werden. (Beide Pole können beliebig plaziert werden)

f) Simulation ergibt:



- Geschlossener Regelkreis nach c) hatte keine Nullstellen, daher bei $D = 1$ kein Schwingen bei Führungssprung.
- Geschlossener Regelkreis nach e) hat eine Nullstelle bei:

$$K_P + K_H\,(1 + 2\,s)$$

$$\Rightarrow \quad 162 + 38\,(1 + 2\,s)$$

$$\Rightarrow \quad 200 + 76\,s$$

$$\Rightarrow \quad s = -\frac{200}{76}$$

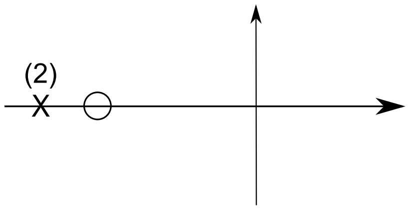
$$\Rightarrow \quad \boxed{s \approx -2,63}$$

Die Pole des geschlossenen Regelkreises liegen bei $s_{1,2} = 5$

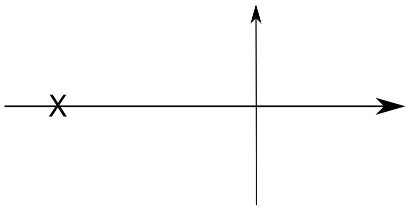
$$G_W(s) = \frac{25\,(1 + \frac{1}{2{,}63}\,s)}{s^2 + 10\,s + 25} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G_W(s) = \frac{25\,(1 + \frac{1}{2{,}63}\,s)}{(s+5)^2}}$$

Man kann 3 Fälle unterscheiden. Hier:

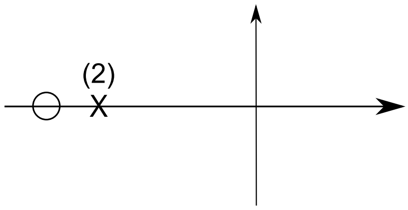
1. Nullstelle rechts von den Polen (Überschwingen)

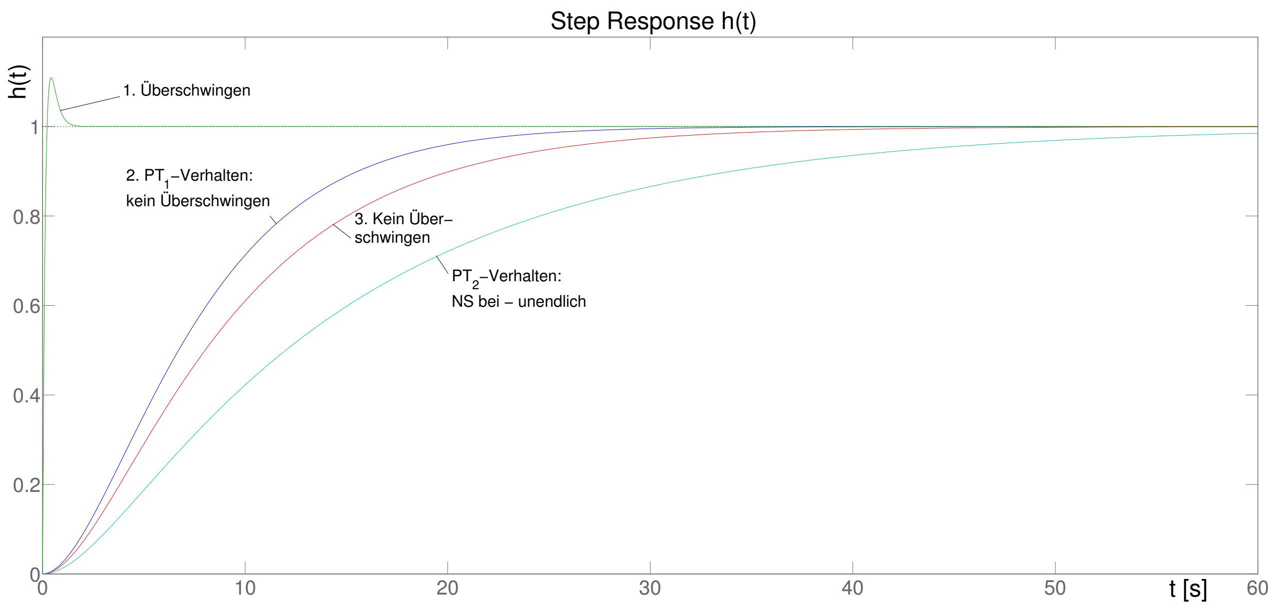


2. Nullstelle liegt auf dem Doppelpol und kürzt einen Pol weg (PT_1-Verhalten. Kein Überschwingen.)



3. Nullstelle liegt links von den Polen (Kein Überschwingen)





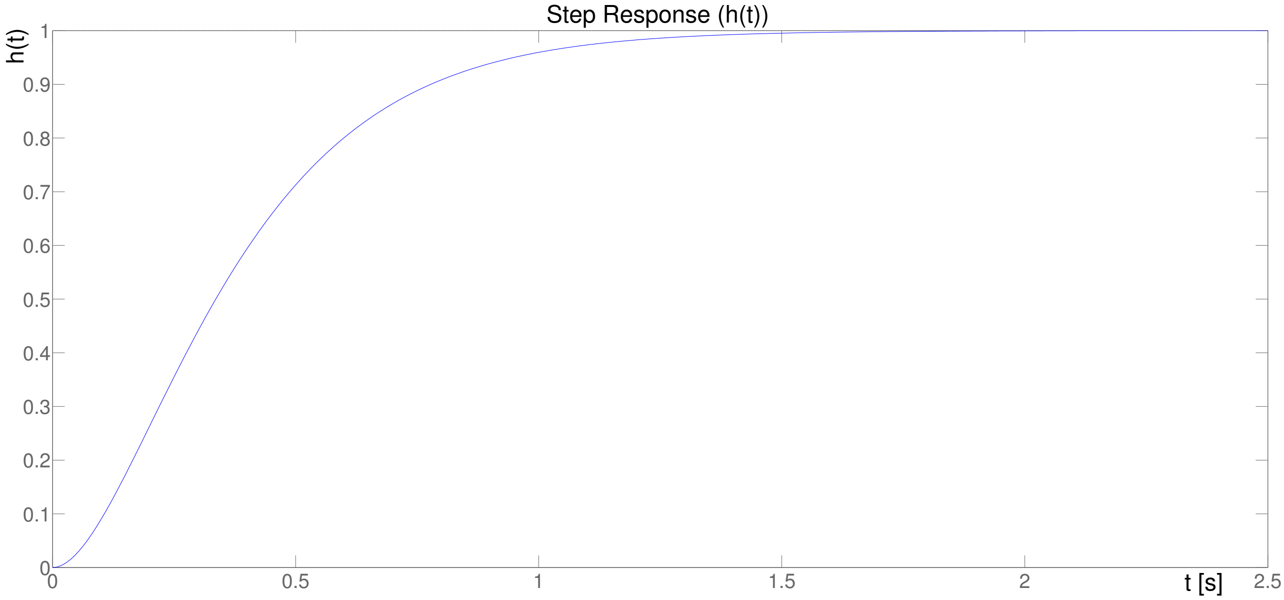
Der Einfluß der Nullstelle kann aus dem Führungsverhalten entfernt werden, indem mal die Führungsgröße mit einer Übertragungsfunktion filtert, die die NS als Pol hat (immer realisierbar). Hier

$$G_V(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2{,}63\, s}}$$

Dieser Vorfilter hat aber keinen Einfluß auf das Störverhalten!

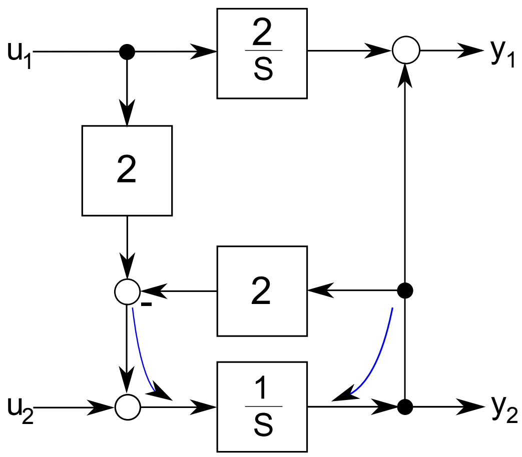
$$
\begin{aligned}
G_{W_{neu}} &= G_V \cdot G_W \\
&= \frac{1}{\cancel{1+\frac{1}{2{,}63\,s}}} \cdot \frac{25\left(\cancel{1+\frac{1}{2{,}63\,s}}\right)}{s^2+10\,s+25}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{G_W(s) = \frac{25}{s^2+10\,s+25}}
$$



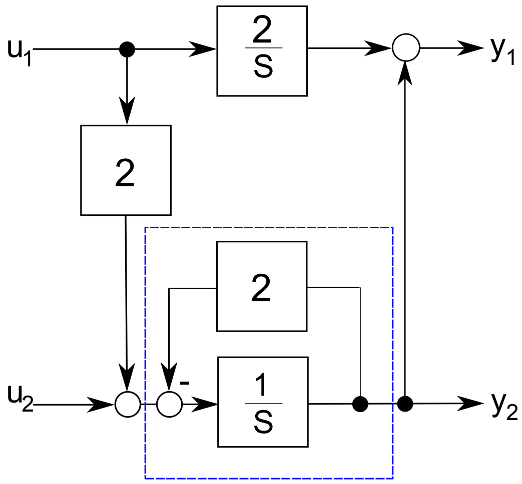
Aufgabe HÜ15.4 Modifikation von Blockschaltbilder

a) 1. Ausgangszustand

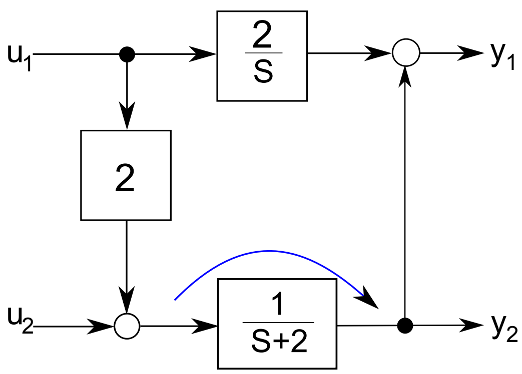


2. Summationsstelle verschieben und Kreisschaltung zusammenfassen

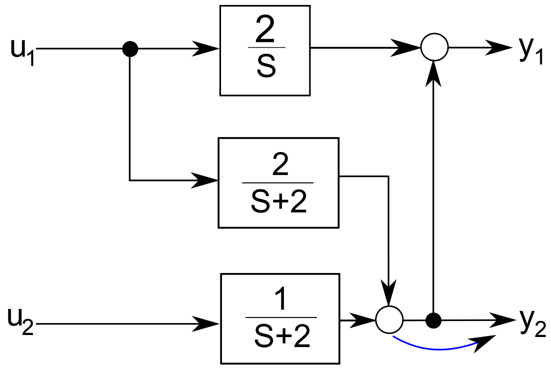
$$\frac{\frac{1}{s}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+2}$$



3. Summationsstelle verlgen

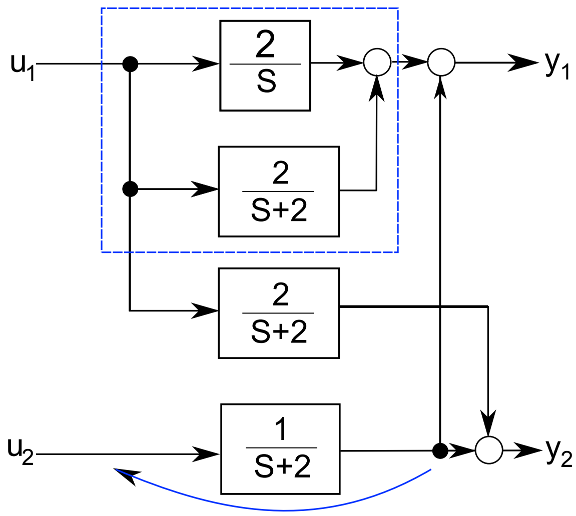


4. Verlegen über Verzweigungspunkt

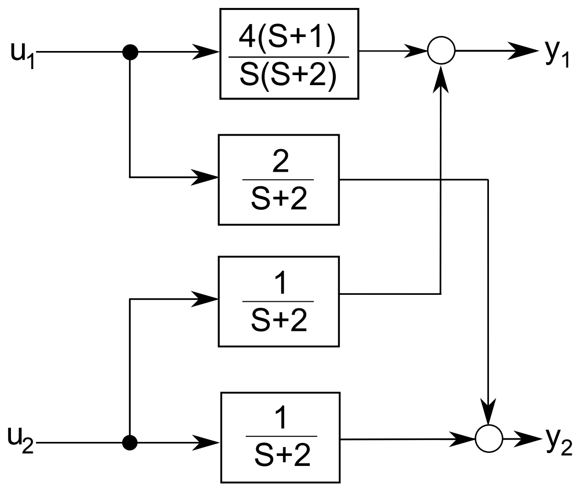


5. Verlegung des Verzweigungspunktes und Zusammenfassung der Parallelschaltung

$$\frac{2}{s} + \frac{2}{s+2} = \frac{4s+4}{s(s+2)} == \frac{4(s+1)}{s(s+2)}$$



6. P-kanonische Regelstrecke



b) Aus Blockschaltbild ablesen

$$Y_1 = \frac{4(s+1)}{s(s+2)} \cdot U_1 + \frac{1}{s+2} \cdot U_2$$

$$Y_2 = \frac{2}{s+2} \cdot U_1 + \frac{1}{s+2} \cdot U_2$$

$$\Rightarrow \vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4(s+1)}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe HÜ15.5 Regelung einer Strecke mit Totzeit

a) Aus dem Blockschaltbild liest man ab:

$$(W(s) - Y(s) + G_M(s)G_{Tot}(s)U(s) - G_M(s)U(s))G_R(s)G_S(s) + Z(s) = Y(s)$$

$$Y(s) = G_S(s)U(s) + Z(s) \Leftrightarrow U(s) = \frac{Y(s) - Z(s)}{G_S(s)}$$

Setzt man $U(s)$ in die erste Gleichung ein und löst nach $Y(s)$, $W(s)$ und $Z(s)$ auf ergibt sich:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_M(s) + G_R(s)[G_S(s) - G_M(s)G_{Tot}(s)]}}_{G_W(s)} \cdot W(s) + \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{1 + G_R(s)G_M(s)[1 - G_{Tot}(s)]}{1 + G_R(s)G_M(s) + G_R(s)[G_S(s) - G_M(s)G_{Tot}(s)]}}_{G_Z(s)} \cdot Z(s)$$

b) Bei Annahme eines exakten Modells $G_S(s) = G_M(s) \cdot G_{Tot}(s)$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_R(s)G_M(s)}{1 + G_R(s)G_M(s)} \cdot G_{Tot}(s)}_{G_W(s)} \cdot W(s) + \underbrace{\left(1 - \frac{G_R(s)G_M(s)}{1 + G_R(s)G_M(s)} \cdot G_{Tot}(s)\right)}_{G_Z(s)} \cdot Z(s)$$

c) Einsetzen von $G_R(s) = K_P$, $G_S(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s}$, $G_M(s) = \frac{1}{s}$ und $G_{Tot}(s) = e^{-2s}$ ergibt:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K_P}{s + K_P} \cdot e^{-2s}}_{G_W(s)} \cdot W(s) + \underbrace{\left(1 - \frac{K_P}{s + K_P} \cdot e^{-2s}\right)}_{G_Z(s)} \cdot Z(s)$$

d) Aus dem Nenner der Übertragungsfunktion erhält man für eine gewünschte Lage des Pols bei -1:

$$s + K_P = s + 1 \Rightarrow \boxed{K_P = 1}$$

Für einen Führungssprung $W = \frac{1}{s}$ erhält man:

$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot e^{-2s}$$

Mit Korrespondenz Nr. 10 aus R6 ($a = 0$, $b = 1$): $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = 1 - e^{-t}$
und dem Zeitverschiebungssatz aus R7 ($T_0 = 2$): $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s} \cdot X(s)\right] = x(t-2)$
folgt im Zeitbereich:

$$\boxed{y(t) = (1 - e^{-(t-2)}) \cdot \varepsilon(t-2)}$$

oder:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 - e^{-(t-2)} & t \geq 2 \end{cases}}$$

Für einen Störsprung $Z = \frac{1}{s}$ ergibt sich:

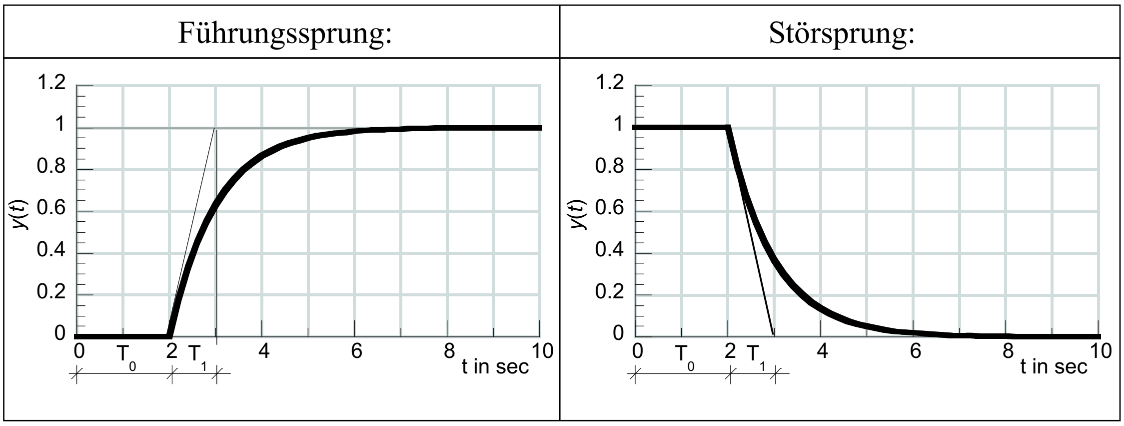
$$Y(s) = G_Z(s) \cdot Z(s) = \frac{1}{s} - \frac{K_P}{s(s+1)} \cdot e^{-2s}$$

Daraus ergibt sich mit Korrespondenz Nr. 10,
Korrespondenz Nr. 2 : $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \varepsilon(t)$
und dem Zeitverschiebungssatz:

$$\boxed{y(t) = \varepsilon(t) - \left(1 - e^{-(t-2)}\right) \cdot \varepsilon(t-2)}$$

oder:

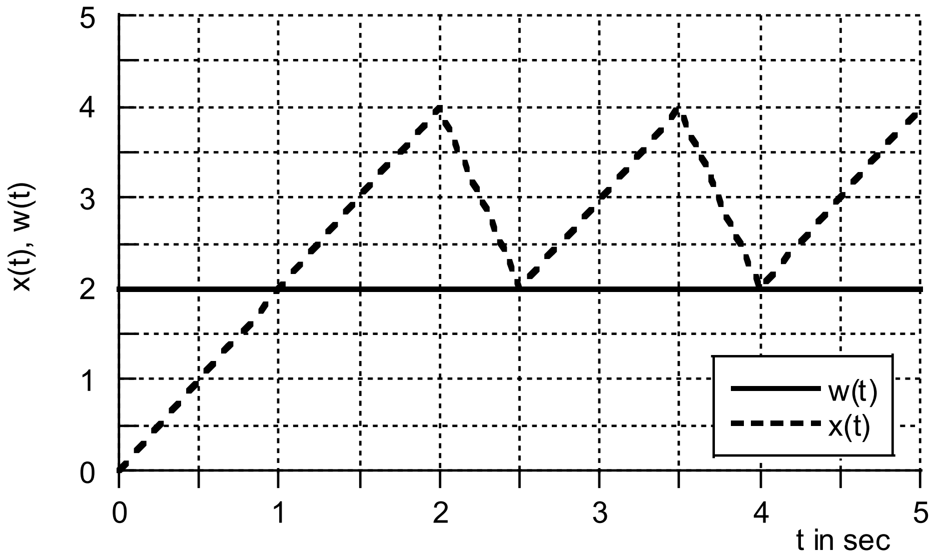
$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 1 & t < 2 \\ e^{-(t-2)} & t \geq 2 \end{cases}}$$



e) Durch diese Methode kann der Regelkreis wie ein gewöhnlicher Regelkreis ohne Totzeit entworfen werden, weil sich die Totzeit nicht auf die Stabilität auswirkt. Denn das Totzeitglied steht im Zähler und nicht im Nenner von $G_W(s)$, bzw. $G_Z(s)$.

HÜ16 Nichtlineare Regelung

Aufgabe HÜ16.1 Nichtlinearer Regelkreis



Der Ausgang des nichtlinearen Gliedes N_1 in der Rückführung beträgt 1 oder 2. Da diese Werte im nichtlinearen Glied N_2 quadriert werden, ergibt sich eine Differenz mit $w(t)$ von 1 ($w(t) - y(t) = 2 - 1 = 1$) oder -2 ($w(t) - y(t) = 2 - 4 = -2$). Nach der Multiplikation mit 2 beträgt das Eingangssignal am Integrator 2 oder -4. Somit setzt sich das Ausgangssignal $x(t)$ aus Geradenstücken mit diesen Steigungen zusammen. Die Umschaltung zwischen diesen Geradenstücken findet bei $x(t) = 2$ und $x(t) = 4$ statt.