Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Sei $G_2 = (\{S\}, \{a, +, *\}, P_2, S)$, wobei P_2 gegeben ist durch:

$$P_2\colon S \to +SS \mid *SS \mid a$$

1. Berechnen Sie $\mathrm{First}_1(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P_2$.
2. Berechnen Sie $\mathrm{First}_2(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P_2$.
3. Überlegen Sie sich, wie man $M_{G_2}^{(2)}$ mit Hilfe von First deterministisch machen kann.

Aufgabe 2 Sei $G_1 = (\{S\}, \{a, +, *\}, P_1, S)$, wobei P_1 gegeben ist durch:

$$P_1\colon S \to SS+ \mid SS* \mid a$$

1. Berechnen Sie $\mathrm{First}_1(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P_1$.
2. Kann man $M_{G_1}^{(2)}$ mit Hilfe von First deterministisch machen?

Aufgabe 3 Sei im Folgenden Σ ein endliches Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\circ\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ bezeichnen wir die Konkatenation zweier Wörter. Sei $\diamond_k\colon \Sigma^* \to \Sigma^{\leq k}$ (die ersten k Zeichen eines Worts) definiert als

$$\begin{aligned} \diamond_k(a_1 \dots a_n) &= a_1 \dots a_{\min(n,k)} \\ &= \begin{cases} a_1 \dots a_k & \text{falls } k \leq n, \\ a_1 \dots a_n & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei außerdem $\odot_k : \Sigma^{\leq k} \times \Sigma^{\leq k} \to \Sigma^{\leq k}$ definiert als

$$w_1 \odot_k w_2 = \diamond_k(w_1 \circ w_2).$$

1. Welche Fälle treten bei $\diamond_k(w_1 \circ w_2)$ für $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ auf?

2. Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt, dass

$$\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(w_2)).$$

3. Zeigen Sie, dass $(\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid ist, also:

   - Für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w \odot_k \varepsilon = \varepsilon \odot_k w = w$.
   - Für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3) = (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3$.

4. Schließen Sie aus 2, dass $\diamond_k\colon (\Sigma^*, \circ, \varepsilon) \to (\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid-Homomorphismus ist, d.h. es gilt $\diamond_k(\varepsilon) = \varepsilon$ und für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt

$$\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(w_1) \odot_k \diamond_k(w_2).$$