Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei $U_\mathcal{A}$ die Menge aller Menschen ist und $I_\mathcal{A}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^\mathcal{A}(x)$: x ist weiblich
- $K^\mathcal{A}(x, y)$: x kennt y
- $v^\mathcal{A}(x) = y$: y ist biologischer Vater von x
- $m^\mathcal{A}(x) = y$: y ist biologischer Mutter von x
- $a^\mathcal{A}$ ist Adam, $e^\mathcal{A}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

(a) $\forall x W(m(x))$

(b) $v(x) = a \wedge K(x, e)$

(c) $\exists x(W(x) \wedge K(a, x))$

(d) $\neg\exists x\forall y(W(y) \to K(x, y))$

(e) $\forall x\neg(\exists y(v(y) = x) \wedge \exists y(m(y) = x))$

(f) $\exists x\exists y(K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$

Drücken Sie die folgenden Aussagen durch prädikatenlogische Formeln aus:

(a) Jeder kennt sich selbst.

(b) Es gibt eine weibliche Person, die Adam kennt.

(c) Jedes Elternpaar kennt sich.

(d) x und y sind Geschwister.

(e) x ist Großvater von y.

(f) Eva ist die Cousine von Adam.

Aufgabe 2
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_\mathcal{C})$, wobei $f^\mathcal{C}(x, y) = x$, $R^\mathcal{C} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{N})$, wobei $f^\mathcal{N}(x, y) = x \cdot y$, $R^\mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
- $\mathcal{P} = (2^\mathbb{N}, I_\mathcal{P})$, wobei $f^\mathcal{P}(x, y) = x \cap y$, $R^\mathcal{P} = \{(x, y) \in 2^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N} \mid x \subseteq y\}$

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $\exists x \forall y R(y, x)$

(b) $\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$

(c) $\forall x \exists y \exists z (y \neq z \wedge f(y, z) = x)$

(d) $\forall x \forall y \forall z \forall w (R(x, y) \wedge R(z, w) \rightarrow R(f(x, z), f(y, w)))$

Aufgabe 3
Wir betrachten die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$ über den natürlichen Zahlen (ohne 0) mit den Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ (mit der üblichen Bedeutung). Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

(a) x ist ungerade.

(b) Es existiert ein multiplikativ neutrales Element.

(c) $x < y$.

(d) y ist Vielfaches von x.

(e) $x \bmod y = z$.

Aufgabe 4
Sind die folgenden prädikatenlogischen Formeln erfüllbar, unerfüllbar oder gültig? Geben Sie ein Modell an, falls die Formel erfüllbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort im Falle der Gültigkeit / Unerfüllbarkeit.

(a) $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$

(b) $\forall x (R(x, y) \wedge f(x) = y)$

(c) $\exists x P(f(x, g(x))) \wedge \forall x \neg P(f(x, x))$

(d) $\exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y)$

(e) $\forall y \exists x (f(x) = y) \wedge \exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y))$

(f) $\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x, y)) \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg R(x, y)$

(g) $\forall x (f(g(x)) = x) \wedge \exists x (g(f(x)) \neq x)$