Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Überführen Sie folgende Formeln in Skolemform mit Matrizen in KNF.

(a) $\exists x \forall y \exists z (P(x) \wedge P(z) \wedge P(y))$

(b) $\forall x \exists y \forall z (P(z) \vee P(f(y)))$

(c) $\forall x \forall y \exists z (P(x) \rightarrow P(z))$

Aufgabe 2
Gegeben seien folgende Formeln in Skolemform mit Matrizen in KNF.

(a) $F_1 = \forall x (P(x) \wedge \neg P(x))$

(b) $F_2 = \forall x ((P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a)))$

(c) $F_3 = \forall x \forall y ((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

Sei $F \in \{F_1, F_2, F_3\}$.

1. Geben Sie $D(\{F\})$ an.
2. Geben Sie $\bigcup E(\{F\})$ in Klauselschreibweise an.
3. Zeigen Sie, dass F unerfüllbar ist, indem Sie Grundresolution benutzen.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{R}})$ die Struktur über den reellen Zahlen mit $+$ und $\cdot$ (mit der üblichen Bedeutung). Formalisieren Sie folgende Aussagen:

(a) $x = 0$ (mit freier Variable x).

(b) $x = 1$ (mit freier Variable x).

(c) $x > 0$ (mit freier Variable x).

(d) $x < y$ (mit freien Variablen x und y).

Aufgabe 4
Betrachten Sie folgende Eigenschaften einer binären Relation R:

1. R ist nicht leer.
2. R ist reflexiv.
3. R ist irreflexiv.
4. R ist symmetrisch.
5. R ist antisymmetrisch.
6. R ist transitiv.

(a) Formulieren Sie jede Eigenschaft als Formel.

(b) Geben Sie zu jeder Formel ein Modell an.

(c) Geben Sie zu jeder Formel eine Struktur an, die kein Modell ist.

Aufgabe 5
Betrachten Sie folgende Formeln:

1. $F_1 := \forall x(f(x) = x)$
2. $F_2 := \exists x \exists y(f(x) \neq f(y))$
3. $F_3 := \forall y \exists x(f(x) = y)$
4. $F_4 := \forall x \forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

(a) Was sagen die Formeln jeweils über f aus?

(b) Geben Sie zu jeder Formel ein Modell an.

(c) Geben Sie zu jeder Formel eine Struktur an, die kein Modell ist.