Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Sei Σ ein Alphabet. Zu $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^n$, $n \geq 0$, sei $w^R = a_n \cdots a_1$ das umgedrehte Wort. Für $L \subseteq \Sigma^*$ schreiben wir $L^R = \{w^R \in \Sigma^* \mid w \in L\}$.

Aufgabe 1 Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik

$$G = (\{S\}, \{a, +, *\}, P, S),$$

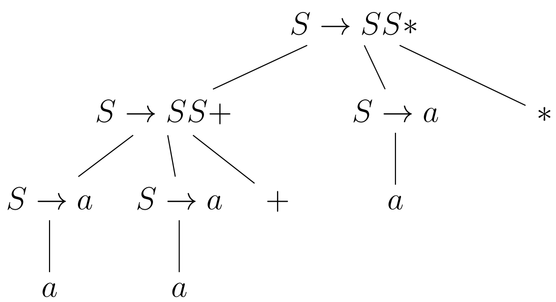
wobei P gegeben ist durch

$$S \to SS+ \mid SS* \mid a.$$

Sei $w = aa + a*$.

(a) Geben Sie zu w alle Syntaxbäume an.

Lösung:
Es gibt nur einen Syntaxbaum zu w:



Hinweis: Wir schreiben der Deutlichkeit halber die Regeln aus, statt sie zu nummerieren.

(b) Geben Sie alle Links- und Rechts-Rechtsableitungen an.

Lösung:
Da es nur einen Syntaxbaum gibt, gibt es jeweils genau eine Ableitung.

- Linksbableitung: $(S \to SS*)(S \to SS+)(S \to a)(S \to a)(S \to a)$
- Rechtsableitung: $(S \to SS*)(S \to a)(S \to SS+)(S \to a)(S \to a)$

Hinweis: Wir schreiben wieder die Regeln aus und fügen Klammern für die Lesbarkeit ein.

Aufgabe 2 Geben Sie kontextfreie Grammatiken zu folgenden Sprachen an:

(a) $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Lösung:
$(\{S\}, \{a,b,c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \to c \mid aSa \mid bSb$.

(b) $L_2 = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\, w = w^R\}$

Lösung:
$(\{S\}, \{a,b\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$.

(c) $L_3 = \{a^m b^{2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$

Lösung:
$(\{S\}, \{a,b\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $P = S \to \varepsilon \mid aSbb$.

(d) $L_4 = \{a^m b^{m+n} c^n \mid m,n \in \mathbb{N}\}$

Lösung:
$(\{S,L,R\}, \{a,b,c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\to LR \\ L &\to \varepsilon \mid aLb \\ R &\to \varepsilon \mid bRc. \end{aligned}$$

(e) $L_5 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \in \mathbb{N},\, i = j \vee j = k\}$

Lösung:
$(\{S,I,K,L,R\}, \{a,b,c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\to I \mid K \\ I &\to Ic \mid L \\ L &\to \varepsilon \mid aLb \\ K &\to aK \mid R \\ R &\to \varepsilon \mid bRc. \end{aligned}$$

Die Sprache kann man auffassen als

$$L_5 = \{a^i b^i c^k \mid i,k \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^j c^j \mid i,j \in \mathbb{N}\}.$$

Wir raten ganz zu Anfang, ob wir im linken oder rechten Teil sind. Rankbemerkung: Die beiden Mengen haben einen nicht leeren Schnitt (nämlich $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$). Das heißt, für solche Wörter hat unsere Grammatik zwei Ableitungen. Es ist *nicht* möglich, eine Grammatik für L_5 anzugeben, bei der alle Wörter nur eine Ableitung haben.

Aufgabe 3 Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ kontextfreie Sprachen. Zeigen Sie, dass folgende Sprachen kontextfrei sind:

(a) $L_1 \cup L_2$

Lösung:
Da L_1 und L_2 kontextfrei sind, gibt es kontextfreie Grammatiken

$$\begin{aligned} G_1 &= (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1), \\ G_2 &= (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2) \end{aligned}$$

mit $\mathcal{L}(G_1) = L_1$ und $\mathcal{L}(G_2) = L_2$. Sei $S \notin N_1 \cup N_2$. Wir konstruieren $G = (N, \Sigma, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} N &= N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \\ \Sigma &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ P &= P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1,\ S \to S_2\}. \end{aligned}$$

(b) $L_1 \circ L_2$

Lösung:
Dies geht analog zu $L_1 \cup L_2$ mit dem Unterschied, dass wir statt den Produktionen $\{S \to S_1,\ S \to S_2\}$ die Produktion $\{S \to S_1 S_2\}$ verwenden.

(c) L_1^R

Lösung:
Da L_1 kontextfrei ist, gibt es eine kontextfreie Grammatik

$$G = (N, \Sigma_1, P, S)$$

mit $\mathcal{L}(G) = L_1$. Die Grammatik für L_1^R ist $G' = (N, \Sigma_1, P', S)$, wobei

$$P' = \{A \to \alpha^R \mid A \to \alpha \in P\}.$$

Zunächst stellen wir fest, dass für alle $w, v \in \Sigma^*$ gilt, dass $(wv)^R = v^R w^R$. Denn sei $w = a_1 \cdots a_n$ und $v = b_1 \cdots b_m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_j \in \Sigma$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Dann gilt

$$(wv)^R = b_m \cdots b_1 a_n \cdots a_1 = (b_1 \cdots b_m)^R (a_1 \cdots a_n)^R = v^R w^R.$$

Somit gilt für alle Sprachen $X, Y \subseteq \Sigma^*$, dass $(XY)^R = Y^R X^R$. Außerdem gilt $(X \cup Y)^R = X^R \cup Y^R$. Sei $A \to \alpha \in P$ mit

$$\alpha = w_0 A_1 w_1 \cdots w_{n-1} A_n w_n,$$

wobei $n \geq 0$, $w_i \in \Sigma_1^*$ für $0 \leq i \leq n$ und $A_i \in N$ für $1 \leq i \leq n$. Es gilt

$$\alpha^R = w_n^R A_n w_{n-1}^R \cdots w_1^R A_1 w_0^R.$$

Für eine Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ und $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$ schreiben wir $[\![\alpha]\!]_G := \{w \in \Sigma^* \mid \alpha \to_G^* w\}$. Wir nehmen an, dass $[\![A_i]\!]_{G'} = [\![A_i]\!]_G^R$ für $1 \leq i \leq n$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}
[\![\alpha^R]\!]_{G'} &= \{w_n^R\}[\![A_n]\!]_{G'}\{w_{n-1}^R\} \cdots \{w_1^R\}[\![A_1]\!]_{G'}\{w_0^R\} \\
&= \{w_n\}^R[\![A_n]\!]_G^R\{w_{n-1}\}^R \cdots \{w_1\}^R[\![A_1]\!]_G^R\{w_0\}^R \\
&= (\{w_0\}[\![A_1]\!]_G\{w_1\} \cdots \{w_{n-1}\}[\![A_n]\!]_G\{w_n\})^R \\
&= [\![\alpha]\!]_G^R.
\end{aligned}$$

Seien $A \to \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_n$ für $n \geq 0$ die Produktionen für A in P. Es gilt

$$\begin{aligned}
[\![A]\!]_{G'} &= [\![\alpha_1^R]\!]_{G'} \cup \cdots \cup [\![\alpha_n^R]\!]_{G'} \\
&= [\![\alpha_1]\!]_G^R \cup \cdots \cup [\![\alpha_n]\!]_G^R \\
&= ([\![\alpha_1]\!]_G \cup \cdots \cup [\![\alpha_n]\!]_G)^R \\
&= [\![A]\!]_G^R.
\end{aligned}$$

Dies gilt insbesondere für S und somit $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)^R$.