Übungsblatt 7

Aufgabe 1 Reduzieren Sie folgende Grammatiken, falls möglich:

Lösung:

Wir führen jeweils zunächst den Algorithmus zum Entfernen nicht produktiver Nichtterminale durch. Dieser hat für jede Produktion einen Counter, der zählt, wie viele Nichtterminale auf ihrer rechten Seite *noch nicht* als produktiv erkannt wurden. Beim Initialisieren (erste Zeile) ist dies einfach die Anzahl der verschiedenen Nichtterminale, die auf der rechten Seite vorkommen. Alle Produktionen, die hier eine 0 erhalten, werden in W, das Working-Set, aufgenommen. Das Result-Set R ist zu Anfang leer. Für jeden weiteren Schritt wählen wir eine Produktion $A \to \alpha$ aus W. Falls A schon in R ist, geschieht nichts. Falls A noch nicht in R ist, haben wir zum ersten Mal A als produktiv erkannt. Wir müssen dann alle Produktionen durchgehen, die A auf der rechten Seite haben, und ihren Counter eins runter zählen. Landet dieser dabei auf 0, so wird die Produktion in W aufgenommen. Wir fügen außerdem noch A in R ein. Der Algorithmus endet, wenn W leer ist.

Zum Entfernen nicht erreichbarer Nichtterminale zeichnen wir den Erreichbarkeitsgraph. Dieser hat die Nichtterminale als Knoten und eine Kante von B nach A, wenn es eine Produktion $A \to \alpha B \beta$ gibt. (In gewissem Sinne gehen die Pfeile also in die andere Richtung.) Es werden dann alle Knoten entfernt, von denen es keinen Weg zum Startsymbol gibt.

(a) $G_1 = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, P_1, S)$, wobei P_1 gegeben ist durch:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid C \\
C &\to a \\
A &\to C \\
B &\to Da \\
D &\to Bb
\end{aligned}
$$

Lösung:

Entfernen nicht produktiver Nichtterminale:

	$S{\to}AB$	$S{\to}C$	$C{\to}a$	$A{\to}C$	$B{\to}Da$	$D{\to}Bb$	W	R
	2	1	0	1	1	1	$\{C{\to}a\}$	$\emptyset$
$C{\to}a$	2	0	0	0	1	1	$\{S{\to}C,\ A{\to}C\}$	$\{C\}$
$S{\to}C$	2	0	0	0	1	1	$\{A{\to}C\}$	$\{C,S\}$
$A{\to}C$	1	0	0	0	1	1	$\emptyset$	$\{C,S,A\}$

Grammatik nach dem Entfernen nicht produktiver Nichtterminale:
$G_1' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, P_1', S)$, wobei P_1' gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to C \\ C &\to a \\ A &\to C \end{aligned}$$

Erreichbarkeitsgraph:

$$\begin{tikzcd} S & C \arrow[l] \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

Grammatik nach dem Entfernen nicht erreichbarer Nichtterminale:
$G_1'' = (\{S, C\}, \{a, b\}, P_1'', S)$, wobei P_1'' gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to C \\ C &\to a \end{aligned}$$

(b) $G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, c\}, P_2, S)$, wobei P_2 gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to SA \\ A &\to AC \mid a \\ B &\to SAC \\ C &\to c \end{aligned}$$

Lösung:
Entfernen nicht produktiver Nichtterminale:

	$S \to SA$	$A \to AC$	$A \to a$	$B \to SAC$	$C \to c$	W	R
	2	2	0	3	0	$\{A \to a,\ C \to c\}$	$\emptyset$
$A \to a$	1	1	0	2	0	$\{C \to c\}$	$\{A\}$
$C \to c$	1	0	0	1	0	$\{A \to AC\}$	$\{A,C\}$
$A \to AC$	1	0	0	1	0	$\emptyset$	$\{A,C\}$

Das Startsymbol S ist nicht produktiv, also gilt $\mathcal{L}(G_2) = \emptyset$. Das heißt, wir können diese Grammatik nicht reduzieren.

(c) $G_3 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P_3, S)$, wobei P_3 gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid a \\ A &\to a \\ C &\to SA \end{aligned}$$

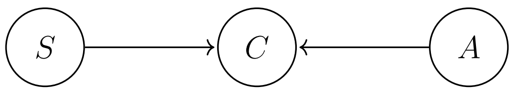
Lösung:
Entfernen nicht produktiver Nichtterminale:

	$S\to AB$	$S\to a$	$A\to a$	$C\to SA$	W	R
	2	0	0	2	$\{S\to a,\ A\to a\}$	$\emptyset$
$S\to a$	2	0	0	1	$\{A\to a\}$	$\{S\}$
$A\to a$	1	0	0	0	$\{C\to SA\}$	$\{S,A\}$
$C\to SA$	1	0	0	0	$\emptyset$	$\{S,A,C\}$

Grammatik nach dem Entfernen nicht produktiver Nichtterminale:
$G_3' = (\{S, A, C\}, \{a\}, P_3', S)$, wobei P_3' gegeben ist durch:

$$S \to a$$
$$A \to a$$
$$C \to SA$$

Erreichbarkeitsgraph:



Grammatik nach dem Entfernen nicht erreichbarer Nichtterminale:
$G_3'' = (\{S\}, \{a\}, P_3'', S)$, wobei P_3'' gegeben ist durch:

$$S \to a$$

(d) $G_4 = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P_4, A)$, wobei P_4 gegeben ist durch:

$$A \to AAB \mid a \mid b$$
$$B \to BBBC$$
$$C \to a$$

Lösung:
Entfernen nicht produktiver Nichtterminale:

	$A\to AAB$	$A\to a$	$A\to b$	$B\to BBBC$	$C\to a$	W	R
	2	0	0	2	0	$\{A\to a,\ A\to b,\ C\to a\}$	$\emptyset$
$A\to a$	1	0	0	2	0	$\{A\to b,\ C\to a\}$	$\{A\}$
$A\to b$	1	0	0	2	0	$\{C\to a\}$	$\{A\}$
$C\to a$	1	0	0	1	0	$\emptyset$	$\{A,C\}$

Grammatik nach dem Entfernen nicht produktiver Nichtterminale:
$G'_4 = (\{A, C\}, \{a, b\}, P'_4, A)$, wobei P'_4 gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} A &\to a \mid b \\ C &\to a \end{aligned}$$

Erreichbarkeitsgraph:

Grammatik nach dem Entfernen nicht erreichbarer Nichtterminale:
$G''_4 = (\{A\}, \{a, b\}, P''_4, A)$, wobei P''_4 gegeben ist durch:

$$A \to a \mid b$$