

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Sei $G = (\{S\}, \{a, +, *\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch:

$$P: S \rightarrow +SS \mid *SS \mid a$$

(a) Berechnen Sie $\text{First}_1(\alpha)$ für jedes $A \rightarrow \alpha \in P$.

(b) Berechnen Sie $\text{First}_2(\alpha)$ für jedes $A \rightarrow \alpha \in P$.

Aufgabe 2 Sei im Folgenden Σ ein endliches Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\circ: \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ bezeichnen wir die Konkatenation zweier Wörter. Sei $\diamond_k: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^{\leq k}$ (die ersten k Zeichen eines Worts) definiert als

$$\begin{aligned} \diamond_k(a_1 \dots a_n) &= a_1 \dots a_{\min(n,k)} \\ &= \begin{cases} a_1 \dots a_k & \text{falls } k \leq n, \\ a_1 \dots a_n & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei außerdem $\odot_k: \Sigma^{\leq k} \times \Sigma^{\leq k} \rightarrow \Sigma^{\leq k}$ definiert als

$$w_1 \odot_k w_2 = \diamond_k(w_1 \circ w_2).$$

(a) Welche Fälle treten bei $\diamond_k(w_1 \circ w_2)$ für $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ auf?

(b) Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt, dass

$$\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(w_2)).$$

(c) Zeigen Sie, dass $(\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid ist, also:

- Für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w \odot_k \varepsilon = \varepsilon \odot_k w = w$.
- Für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3) = (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3$.

(d) Schließen Sie aus Teilaufgabe (b), dass $\diamond_k: (\Sigma^*, \circ, \varepsilon) \rightarrow (\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid-Homomorphismus ist, also:

- $\diamond_k(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt $\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(w_1) \odot_k \diamond_k(w_2)$.