Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Sei $G = (\{S\}, \{a, +, *\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch:

$$P\colon S \to +SS \mid *SS \mid a$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{First}_1(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P$.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\mathrm{First}_1(S) \supseteq \mathrm{First}_1(+SS) \cup \mathrm{First}_1(*SS) \cup \mathrm{First}_1(a).$$

Wir starten mit $\mathrm{First}_1(S) = \emptyset$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\{+\} \odot_1 \emptyset \odot_1 \emptyset) \cup (\{*\} \odot_1 \emptyset \odot_1 \emptyset) \cup \{a\}\\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{a\}\\ &= \{a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\{+\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{a\}) \cup (\{*\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{a\}) \cup \{a\}\\ &= \{+\} \cup \{*\} \cup \{a\}\\ &= \{+, *, a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{+, *, a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\{+\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\})\\ &\quad \cup (\{*\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\})\\ &\quad \cup \{a\}\\ &= \{+\} \cup \{*\} \cup \{a\}\\ &= \{+, *, a\}.\end{aligned}$$

Da wir wieder $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{+, *, a\}$ erhalten haben, gilt $\mathrm{First}_1(S) = \{+, *, a\}$. Wir erhalten also für die rechten Seiten, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(+SS) &= \{+\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\} = \{+\},\\ \mathrm{First}_1(*SS) &= \{*\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\} = \{*\},\\ \mathrm{First}_1(a) &= \{a\}.\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{First}_2(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P$.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\mathrm{First}_2(S) \supseteq \mathrm{First}_2(+SS) \cup \mathrm{First}_2(*SS) \cup \mathrm{First}_2(a).$$

Wir starten mit $\mathrm{First}_2(S) = \emptyset$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) &\supseteq (\{+\} \odot_2 \emptyset \odot_2 \emptyset) \cup (\{*\} \odot_2 \emptyset \odot_2 \emptyset) \cup \{a\}\\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{a\}\\ &= \{a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) &\supseteq (\{+\} \odot_2 \{a\} \odot_2 \{a\}) \cup (\{*\} \odot_2 \{a\} \odot_2 \{a\}) \cup \{a\}\\ &= \{+a\} \cup \{*a\} \cup \{a\}\\ &= \{+a, *a, a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{+a, *a, a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) \supseteq\ & (\{+\} \odot_2 \{+a, *a, a\} \odot_2 \{+a, *a, a\})\\ &\cup (\{*\} \odot_2 \{+a, *a, a\} \odot_2 \{+a, *a, a\})\\ &\cup \{a\}\\ &= \{++, +*, +a\} \cup \{*+, **, *a\} \cup \{a\}\\ &= \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) \supseteq\ & (\{+\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}\\ &\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\})\\ &\cup (\{*\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}\\ &\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\})\\ &\cup \{a\}\\ &= \{++, +*, +a\} \cup \{*+, **, *a\} \cup \{a\}\\ &= \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}.\end{aligned}$$

Da wir wieder $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}$ erhalten haben, gilt $\mathrm{First}_2(S) = \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}$. Wir erhalten also für die rechten Seiten, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{First}_2(+SS) &= \{+\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\
&\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\
&= \{++, +*, +a\}, \\
\mathrm{First}_2(*SS) &= \{*\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\
&\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\
&= \{*+, **, *a\}, \\
\mathrm{First}_2(a) &= \{a\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Sei im Folgenden Σ ein endliches Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\circ\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ bezeichnen wir die Konkatenation zweier Wörter. Sei $\diamond_{\mathrm{k}}\colon \Sigma^* \to \Sigma^{\leq k}$ (die ersten k Zeichen eines Worts) definiert als

$$\begin{aligned}
\diamond_{\mathrm{k}}(a_1 \dots a_n) &= a_1 \dots a_{\min(n,k)} \\
&= \begin{cases} a_1 \dots a_k & \text{falls } k \leq n, \\ a_1 \dots a_n & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Sei außerdem $\odot_k\colon \Sigma^{\leq k} \times \Sigma^{\leq k} \to \Sigma^{\leq k}$ definiert als

$$w_1 \odot_k w_2 = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2).$$

(a) Welche Fälle treten bei $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2)$ für $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ auf?

Lösung:
Wenn $k \leq |w_1|$, dann gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1)$. Wenn $k > |w_1|$, dann gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(w_2)$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt, dass

$$\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)).$$

Lösung:

$k \leq |w_1|$: Es gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1)$. Außerdem folgt aus $|(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1))| = k$, dass $\diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)) = \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1)) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1)$.

$k > |w_1|$: Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$, dass $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w) = w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(w)$. Außerdem gilt, dass $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1) = w_1$, also

$$\begin{aligned}
\diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)) &= \diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)) \\
&= w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_2)) \\
&= w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(w_2).
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Tatsache, dass für alle $w \in \Sigma^*$ und $k' \in \mathbb{N}$ mit $k' \leq k$ gilt, dass $\diamond_{\mathrm{k'}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w)) = \diamond_{\mathrm{k'}}(w)$.

(c) Zeigen Sie, dass $(\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid ist, also:

- Für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w \odot_k \varepsilon = \varepsilon \odot_k w = w$.

  Lösung:
  Es gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w) = w$ für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$, also

  $$\begin{aligned} w \odot_k \varepsilon &= \diamond_{\mathrm{k}}(w \circ \varepsilon) = \diamond_{\mathrm{k}}(w) = w \\ \varepsilon \odot_k w &= \diamond_{\mathrm{k}}(\varepsilon \circ w) = \diamond_{\mathrm{k}}(w) = w. \end{aligned}$$

- Für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3) = (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3$.

  Lösung:
  Aus (b) und der Tatsache, dass $\diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w)) = \diamond_{\mathrm{k}}(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$, erhalten wir für alle $w, w' \in \Sigma^*$, dass

  $$\begin{aligned} \diamond_{\mathrm{k}}(w \circ w') &= \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w') \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w')) \\ &= \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w) \circ \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w'))) \\ &= \diamond_{\mathrm{k}}(w \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w')). \end{aligned}$$

  Analog gilt, dass

  $$\diamond_{\mathrm{k}}(w \circ w') = \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w) \circ w').$$

  Somit erhalten wir für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$, dass

  $$\begin{aligned} (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3 &= \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) \circ w_3) \\ &= \diamond_{\mathrm{k}}((w_1 \circ w_2) \circ w_3) \\ &= \diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ (w_2 \circ w_3)) \\ &= \diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w_2 \circ w_3)) \\ &= w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3). \end{aligned}$$

(d) Schließen Sie aus Teilaufgabe (b), dass $\diamond_{\mathrm{k}} \colon (\Sigma^*, \circ, \varepsilon) \to (\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid-Homomorphismus ist, also:

- $\diamond_{\mathrm{k}}(\varepsilon) = \varepsilon$.

  Lösung:
  Klar.

- Für für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \odot_k \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)$.

  Lösung:
  $$\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \odot_k \diamond_{\mathrm{k}}(w_2).$$